

# МАТЕМАТИКА И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Выпуск 18



Ярославль 2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Ярославский государственный технический университет»

**МАТЕМАТИКА  
И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ**

**ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА**

Выпуск 18

Ярославль  
Издательство ЯГТУ  
2023

УДК 51:378

ББК 22.1

М34

**М34 Математика и естественные науки. Теория и практика:** Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 18. – Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2023. – 144 с.

ISBN 978-5-9914-0992-6

В сборнике представлены научные статьи по актуальным вопросам математики, физики, информатики и методики их преподавания, а также математического моделирования технических, химических и технологических процессов и систем.

УДК 51:378

ББК 22.1

Редакционная коллегия: А. Н. Жаров (председатель), А.В. Бородин,  
Д. О. Бытев, Ю. К. Оленикова, В. Ш. Ройтенберг.

Рецензенты: кафедра высшей математики и системного моделирования сложных процессов ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский университет государственной противопожарной службы МЧС России»; В.И. Бачурин, д-р физ.-мат. наук, доцент, ведущий научный сотрудник Ярославского филиала Физико-технологического института имени К.А. Валиева РАН.

ISBN 978-5-9914-0992-6

© Ярославский государственный  
технический университет, 2023

# МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА

УДК 517.925.51

**В. В. Абрамов**

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина  
Россия, г. Рязань, e-mail: v.abramov@365.rsu.edu.ru

## УСТОЙЧИВОСТЬ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕТОЧНО ЗАДАНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

*Исследована нормальная автономная система дифференциальных уравнений с правыми частями в виде сумм форм. Предполагается, что векторы коэффициентов форм определены лишь условиями включения в некоторые компактные множества. Установлены признаки устойчивости нулевого решения относительно положительного конуса при любом выборе допустимых коэффициентов системы. Используются оценки правых частей уравнений.*

**Ключевые слова:** система дифференциальных уравнений, устойчивость, метод Ляпунова, условная устойчивость, робастная устойчивость

**V. V. Abramov**

S.A. Yesenin Ryazan State University  
Russia, Ryazan, e-mail: v.abramov@365.rsu.edu.ru

## STABILITY OF THE ZERO SOLUTION OF A POLYNOMIAL SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INACCURATELY SPECIFIED COEFFICIENTS

*A normal autonomous system of differential equations with right-hand sides in the form of sums of forms is investigated. It is assumed that the vectors of the coefficients of the forms are determined only by the conditions of inclusion in some compacts. The signs of stability of the zero solution with respect to the positive cone are established for any choice of acceptable coefficients of the system. Estimates of the right-hand sides of the equations are used.*

**Keywords:** system of differential equations, stability, Lyapunov method, conditional stability, robust stability

Проблема определения характера устойчивости тривиального решения системы с неточными коэффициентами имеет важное значение для

приложений, когда требуется выяснить, нужно ли дополнительно уточнять доверительные оценки коэффициентов конструируемой модели, чтобы она демонстрировала «стабильное поведение».

Началом целой серии исследований по данной проблеме послужила работа [1], где в терминах свойств четырех «угловых» многочленов сформулирован критерий для устойчивости линейной однородной автономной системы при условии, что коэффициенты соответствующего характеристического уравнения ограничены отрезками. В работе [2] применен несколько иной подход. В ней для линейного уравнения  $n$ -го порядка решена задача определения расстояния до границы области устойчивости в пространстве коэффициентов при условии, что коэффициенты могут быть выбраны произвольно в классе периодических функций. В целом различным аспектам проблем робастной устойчивости и робастного управления линейных систем посвящена обширная литература, установлены разнообразные критерии (Харитонов, Неймарка, Цыпкина – Поляка и другие). Недостаточно изученным остается случай устойчивости неавтономной линейной системы. Практически неисследованным является случай устойчивости нулевого решения нелинейной системы.

Для линейных неавтономных систем переменные коэффициенты могут рассматриваться как неточно заданные. При этом в случае ограниченности коэффициентов вопрос об устойчивости системы может решаться с помощью вспомогательной автономной системы с интервальными ограничениями на коэффициенты [3].

В данной работе предлагается рассматривать систему с полиномиальной правой частью и с неточно заданными коэффициентами как систему с векторным параметром большой размерности. При этом проблему определения характера устойчивости тривиального решения удобно сводить к определению знаков многочленов, мажорирующих правые части исследуемой системы.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(a, x), \quad (1)$$

в которой  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(a, x) = (f_1(a, x), \dots, f_n(a, x))$ ,  $f_i(a, x) = \sum_{k=1}^{S_i} f_{ki}(a, x)$ ,  $a$  – набор коэффициентов,  $f_{ki}(a, x)$  – форма от  $x$  порядка  $k \in \mathbb{N}$ , то есть  $f_{ki}(a, x) = (a_{ki}, x^k)$ ,  $x^k$  – вектор, составленный из всех различных произведений вида  $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$  ( $k_1 + \dots + k_n = k$ ,  $k_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $j = \overline{1, n}$ ),  $k = \overline{1, S_i}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Ясно, что при любом наборе коэффициентов  $a \in A = \prod_{i=1}^n \prod_{k=1}^{S_i} A_{ki}$  система (1) имеет нулевое решение  $x \equiv 0_n$ . В окрестности этого решения сис-

тема (1) однозначно определяет каждое решение  $x(t, x_0, a)$  условием  $x(0, x_0, a) = x_0$ .

Будем предполагать, что для форм  $f_{ki}(a, x)$  векторы коэффициентов выбираются произвольно с точностью до включений  $a_{ki} \in A_{ki}$ , в которых  $A_{ki} \neq \emptyset$  – компактные множества,  $k = \overline{1, S_i}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . При этом правые части являются неточно заданными.

**Определение 1.** Решение  $x \equiv 0_n$  системы вида (1) устойчиво относительно множества  $M$ ,  $0_n \in M$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что при всех  $a \in A$ , при всех  $x_0 \in M(\delta) = \{x \in M : \|x\| < \delta\}$  и при любом  $t > 0$  справедливо неравенство  $\|x(t, x_0, a)\| < \varepsilon$ .

**Определение 2.** Решение  $x \equiv 0_n$  системы вида (1) асимптотически устойчиво относительно множества  $M$ ,  $0_n \in M$ , если оно устойчиво относительно  $M$  и при любых  $x_0 \in \text{int } M(\delta)$ ,  $a \in A$  является притягивающим, то есть  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t, x_0, a)\| = 0$ .

Любое множество  $M(\delta)$  из определений 1 или 2 будем называть оценкой области условной устойчивости нулевого решения. Очевидно, чем больше величина  $\delta > 0$ , тем лучше эта оценка.

**Задача.** Установить признаки устойчивости решения нулевого решения системы (1) относительно конуса  $K = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0_n\}$  по определениям 1 и 2. Дать оценку  $K(\delta)$  для области устойчивости нулевого решения.

Для решения задачи используем способ построения оценок из [4].

Для определенности выберем и далее будем использовать норму  $\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$ . Введем следующие обозначения:

$$\Lambda_1 = \{x \in K : \|x\| = 1\}, \quad \Delta_k = A_{k1} \times \dots \times A_{kn} \times \Lambda_1,$$

$$K_i = \{x \in K : x = (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)\}, \quad \Lambda_{i1} = \{x \in K_i : \|x\| = 1\},$$

$$A_i = A_{i1} \times \dots \times A_{S_i i}, \quad \Gamma_{ki} = A_{ki} \times \Lambda_{i1}, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, S}, \quad S = \max_{1 \leq i \leq n} S_i.$$

Составим для правых частей системы (1) мажорирующие многочлены в окрестности вершины конуса:

$$P_i(\alpha) = \sum_{k=1}^{S_i} p_{ki} \alpha^{k-1}, \quad i = \overline{1, n}, \quad \bar{P}(\alpha) = \sum_{k=1}^S \bar{p}_k \alpha^{k-1},$$

коэффициенты которых определены равенствами:

$$p_{ki} = \min_{\Gamma_{ki}} f_{ki}(a, x), \quad k = \overline{1, S_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad \bar{p}_k = \max_{\Delta_k} \sum_{i=1}^n f_{ki}(a, x), \quad k = \overline{1, S}.$$

**Теорема 1.** Пусть существует такое число  $\gamma_0 > 0$ , что  $P_i(\alpha) \geq 0$ ,  $i = \overline{1, n}$  и  $\bar{P}(\alpha) \leq 0$  ( $\bar{P}(\alpha) < 0$ ) при  $0 < \alpha < \gamma_0$ . Тогда решение  $x \equiv 0_n$  системы (1) устойчиво (асимптотически устойчиво) относительно множества  $K$ .

**Доказательство.** 1. Произвольным образом зафиксируем число  $\gamma: 0 < \gamma < \gamma_0$  и рассмотрим окрестность вершины конуса  $K(\gamma)$ . Граница этой области  $\partial K(\gamma)$  составлена из плоскостей:  $F_i(x) = -x_i = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $\bar{F}(x, \gamma) = \sum_{i=1}^n x_i - \gamma = 0$ .

Выполним подстановку  $x = \alpha\lambda$ , в которой  $\alpha > 0$  и  $\lambda \in \Lambda_i$ , если  $x \in K_i$ , или  $\lambda \in \Lambda_1$ , если  $x \in K$ .

Допустим, при  $0 < \alpha < \gamma_0$  справедливы неравенства  $P_i(\alpha) \geq 0$ ,  $i = \overline{1, n}$  и  $\bar{P}(\alpha) \leq 0$ . Тогда на  $\partial K(\gamma)$  справедливы оценки:

$$(\nabla F_i(x), f_i(a, x)) \Big|_{\substack{a \in \Lambda_i \\ F_i(x)=0}} = -f_i(a, x) \Big|_{\substack{a \in \Lambda_i \\ x \in K_i}} \leq -\alpha P_i(\alpha) \leq 0, \quad \alpha < \gamma, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

$$(\nabla \bar{F}(x), f(a, x)) \Big|_{\substack{a \in A \\ \bar{F}(x, \gamma)=0}} = \sum_{i=1}^n f_i(a, \alpha\lambda) \Big|_{\substack{a \in A, \\ \alpha=\gamma, \lambda \in \Lambda_1}} \leq \gamma \bar{P}(\gamma) \leq 0. \quad (3)$$

Из оценок (2) и (3) следует, что  $\overline{K(\gamma)}$  – положительно инвариантное множество для системы (1) при любом выборе коэффициентов  $a \in A$ . Поэтому справедливы следующие утверждения:

1) решения  $x(t, x_0, a)$  системы (1) нелокально продолжаемы вправо при любых  $x_0 \in \overline{K(\gamma)}$  и  $a \in A$ ;

2) если произвольно зафиксировать  $\varepsilon > 0$  и выбрать  $\delta = \min\{\varepsilon, \gamma\}$ , то для всех  $x_0 \in \overline{K(\delta)}$ ,  $a \in A$  и  $t > 0$  выполняется условие  $x(t, x_0, a) \in K(\varepsilon)$ .

Итак, из утверждений 1) и 2) следует, что решение  $x \equiv 0_n$  системы (1) устойчиво относительно множества  $K$  по определению 1.

2. Допустим, при  $0 < \alpha < \gamma_0$  справедливы неравенства  $P_i(\alpha) \geq 0$ ,  $i = \overline{1, n}$  и  $\bar{P}(\alpha) < 0$ . Произвольно выберем  $x_0 \in \text{int} K(\gamma_0)$  и  $a \in A$ . Так как

$\bar{P}(\alpha) < 0$  при  $0 < \alpha < \gamma_0$ , то неравенство типа (3) выполняется строго. Значит, функция  $v(t) = \|x(t, x_0, a)\| > 0$  строго убывает на интервале  $(0, +\infty)$ . Следовательно, существует  $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \gamma_1 \in [0, \gamma_0)$ . Произвольно зафиксируем число  $\gamma_2 \in (\gamma_1, \gamma_0)$ . На замкнутом конусном отрезке  $K(\gamma_1, \gamma_2) = \{x \in \overline{K(\gamma_2)} : \|x\| \geq \gamma_1\}$  получим оценку

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^n f_i(a, x(t, x_0, a)) \leq \gamma \bar{P}(\gamma) \leq P^*, \quad (4)$$

в которой  $\gamma = \|a\|$ ,  $a \in K(\gamma_1, \gamma_2)$ ,  $P^* = \gamma_1 \cdot \max_{[\gamma_1, \gamma_2]} \bar{P}(\gamma)$ .

Если предположить, что  $\gamma_1 > 0$ , то в силу оценки (4) при  $t > 0$  справедливо неравенство  $\dot{v}(t) \leq P^* < 0$ . Тогда имеет место соотношение  $v(t) \leq \exp(P^* t)$ . Но в то же время  $0 < \gamma_1 \leq \|x(t, x_0, a)\|$ . Два последних неравенства противоречат друг другу. Значит, верно  $\gamma_1 > 0$ .

Итак,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t, x_0, a)\| = 0$  для всех  $x_0 \in \text{int } K(\gamma_0)$  и  $a \in A$ . То есть решение  $x \equiv 0_n$  системы (1) является также и притягивающим, и потому оно асимптотически устойчиво по определению 2. Теорема 1 доказана.

**Замечание.** Из доказательства теоремы 1 следует, что в качестве оценки области устойчивости нулевого решения можно выбрать множество  $K(\gamma_0)$ .

**Пример.** Пусть дана система вида (1)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (a_{111}x_1 + a_{112}x_2) + (a_{211}x_1^2 + a_{212}x_1x_2 + a_{213}x_2^2) + \\ \quad + (a_{311}x_1^3 + a_{312}x_1^2x_2 + a_{313}x_1x_2^2 + a_{314}x_2^3), \\ \dot{x}_2 = (a_{121}x_1 + a_{122}x_2) + (a_{221}x_1^2 + a_{222}x_1x_2 + a_{223}x_2^2) + \\ \quad + (a_{321}x_1^3 + a_{322}x_1^2x_2 + a_{323}x_1x_2^2 + a_{324}x_2^3), \end{cases} \quad (5)$$

в которой коэффициенты определены с точностью до включений:

$$\begin{aligned} a_{11} &= (a_{111}, a_{112}) \in A_{11} = [-5; -4] \times [1; 3], \\ a_{12} &= (a_{121}, a_{122}) \in A_{12} = [3; 9/2] \times [-4; -7/2]; \\ a_{21} &= (a_{211}, a_{212}, a_{213}) \in A_{21} = [-1; 0] \times [1; 10] \times [2; 5], \\ a_{22} &= (a_{221}, a_{222}, a_{223}) \in A_{22} = [1/2; 1] \times [-20; -15] \times [-9/2; -7/2]; \\ a_{31} &= (a_{311}, a_{312}, a_{313}, a_{314}) \in A_{31} = [-1; 1] \times [-10; -1] \times [-7; -13/2] \times [1; 2], \\ a_{32} &= (a_{321}, a_{322}, a_{323}, a_{324}) \in A_{32} = [0; 3] \times [-2; 2] \times [-1; 0] \times [-11/2; 0]. \end{aligned}$$



Для системы (5) вычислим коэффициенты определенных выше многочленов типа  $P_i(\alpha)$   $\bar{P}(\alpha)$ , а затем получим оценки для этих многочленов.

Так как  $p_{11} = a_{112} \geq 1$ ,  $p_{21} = a_{213} \geq 2$ ,  $p_{31} = a_{314} \geq 1$ , то при всех  $\alpha > 0$  имеет место неравенство  $P_1(\alpha) \geq (\alpha + 1)^2 > 0$ .

Так как  $p_{12} = a_{121} \geq 3$ ,  $p_{22} = a_{221} \geq 1/2$ ,  $p_{32} = a_{321} \geq 0$ , то для любого  $\alpha > 0$  справедлива оценка  $P_2(\alpha) \geq 0$ ,  $5\alpha + 3 > 0$ .

Из условий  $\bar{p}_1 \leq a_{111} + a_{112} + a_{121} + a_{122} \leq 0$ ,  $\bar{p}_2 \leq a_{211} + a_{212} + a_{213} + a_{221} + a_{222} + a_{223} \leq -5/2$ ,  $\bar{p}_3 \leq a_{311} + a_{312} + a_{313} + a_{314} + a_{321} + a_{322} + a_{323} + a_{324} \leq 1/2$  следует, что  $\bar{P}(\alpha) \leq \alpha^2/2 - 5/2 < 0$  при  $0 < \alpha < 5$ .

Таким образом, при  $\gamma_0 = 5$  выполняются условия теоремы 1. Значит, нулевое решение системы (5) асимптотически устойчиво относительно сектора неотрицательных векторов. В качестве оценки области устойчивости можно взять треугольник:  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ ,  $x_1 + x_2 \leq 5$ .

В качестве прямого следствия из теоремы 1 сформулируем утверждение, позволяющее сократить количество вычислений для проверки наличия у нулевого решения свойства асимптотической устойчивости без оценки области устойчивости.

**Теорема 2.** Допустим, выполняются условия: 1) либо  $p_{ki} = 0$  при всех  $k = \overline{1, S_i}$ , либо  $p_{q_i} > 0$  – первый ненулевой коэффициент многочлена  $P_i(\alpha)$  для каждого  $i = \overline{1, n}$ ; 2)  $\bar{p}_m < 0$  – первый ненулевой коэффициент многочлена  $\bar{P}(\alpha)$ . Тогда решение  $x \equiv 0_n$  системы (1) асимптотически устойчиво относительно множества  $K$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Харитонов В.Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. XIV, № 11. С. 2086–2088.
2. Неймарк Ю.И. Робастная устойчивость при периодических возмущениях // Автоматика и телемеханика. 1992. № 12. С. 51–54.
3. Абрамов В.В. Применение свойства робастной устойчивости // Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина: вековая история как фундамент дальнейшего развития (100-летию юбилею РГУ им. С.А. Есенина посвящается): материалы науч.-практ. конф. преподавателей РГУ им. С.А. Есенина по итогам 2014/2015 учебного года. Рязань: Рязанский гос. ун-т, 2015. С. 535–541.
4. Абрамов В.В. Ветвление периодического решения с положительным начальным значением // Вестник РАЕН. 2017. Т. 17, № 4. С. 4–7.

УДК 515.177

**М. А. Башкин**

Рыбинский государственный авиационный технический университет  
им. П. А. Соловьева  
Россия, г. Рыбинск, e-mail: mbashkin@rsatu.ru

## ОДНО ОДНОРОДНОЕ НЕРАСЩЕПИМОЕ СУПЕРМНОГООБРАЗИЕ

*В работе показано, что для расслоения  $L_{-8} \oplus L_{-5} \oplus L_{-3} \oplus L_{-2}$  существует единственное с точностью до изоморфизма однородное нерасщепимое супермногообразие.*

**Ключевые слова:** однородное нерасщепимое супермногообразие, ретракт, касательный пучок

**M. A. Bashkin**

P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University  
Russia, Rybinsk, e-mail: mbashkin@rsatu.ru

## ONE NON-SPLIT HOMOGENEOUS SUPERMANIFOLD

*We prove that for the vector bundle  $L_{-8} \oplus L_{-5} \oplus L_{-3} \oplus L_{-2}$  there exist, up to isomorphism, only one homogeneous non-split supermanifold.*

**Keywords:** non-split homogeneous super manifolds, retract, tangent sheaf

В работе продолжена классификация однородных нерасщепимых супермногообразий [1–4], связанных с комплексной проективной прямой. Полученный результат является новым и ранее не публиковался.

Напомним, что комплексным супермногообразием размерности  $m|n$  называется  $\mathbf{Z}_2$ -градуированное пространство  $(M, O)$ , где  $M$  – комплексное многообразие, а  $O$  – пучок коммутативных супералгебр на  $M$ , локально изоморфное паре  $(U, \Lambda_{F_m}(\xi_1, \dots, \xi_n))$ , где  $U$  – область в  $\mathbf{C}^m$ ,  $F_m$  – пучок голоморфных функций в  $\mathbf{C}^m$ . Любое голоморфное векторное расслоение  $E$  над комплексным многообразием  $(M, F)$  определяет комплексное супермногообразие  $(M, \Lambda_F E)$ , где  $E$  – пучок голоморфных сечений расслоения  $E$ . Супермногообразие называется однородным, если суперал-

гебра голоморфных векторных полей транзитивна на нем, т. е. порождает касательное суперпространство в каждой его точке.

В [5] показано, что любое голоморфное векторное расслоение  $\mathbf{E}$  ранга  $n$  над  $\mathbf{M} = \mathbf{CP}^1$ , определяющее однородное расщепимое супермногообразие, имеет вид  $\bigoplus_{i=1}^n L_{-k_i}$ , где все  $k_i \geq 0$ ,  $L_k$  – голоморфное линейное расслоение степени  $k$ .

Нашей целью будет построение однородного нерасщепимого супермногообразия, связанного с однородным расщепимым супермногообразием  $\mathbf{CP}_{8,5,3,2}^{14}$ , определяемым голоморфным векторным расслоением  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{CP}^1$  ранга 4 вида  $\mathbf{E} = L_{-8} \oplus L_{-5} \oplus L_{-3} \oplus L_{-2}$ .

Рассмотрим стандартное покрытие  $\mathbf{CP}^1$  двумя аффинными картами  $U_0$  и  $U_1$  с локальными координатами  $x$  и  $y = 1/x$  соответственно. Тогда в  $U_0 \cap U_1$  имеем

$$y = x^{-1}, \quad \eta_1 = x^{-8} \xi_1, \quad \eta_2 = x^{-5} \xi_2, \quad \eta_3 = x^{-3} \xi_3, \quad \eta_4 = x^{-2} \xi_4,$$

где  $\xi_i$  и  $\eta_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) – базисные сечения расслоения  $\mathbf{E}$  над  $U_0$  и  $U_1$ .

Пусть  $T_{\text{gr}}$  – градуированный касательный пучок супермногообразия  $\mathbf{CP}_{8,5,3,2}^{14}$  и  $\mathcal{U}(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}_{\text{gr}})$  – супералгебра Ли векторных полей на нем.

Рассмотрим точную последовательность (см. [5])

$$0 \rightarrow \text{End } \mathbf{E} \rightarrow \mathcal{U}(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}_{\text{gr}})_0 \xrightarrow{\beta} \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C}) \rightarrow 0. \quad (1)$$

Подалгебра  $\alpha \subset \mathcal{U}(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}_{\text{gr}})_0$  расщепляет эту точную последовательность если  $\beta$  изоморфно отображает ее на  $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ , или, что равносильно, имеем разложение в полупрямую сумму  $\mathcal{U}(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}_{\text{gr}})_0 = \text{End } \mathbf{E} \oplus \alpha$ . В работе [5] показано, что супермногообразии с ретрактом  $(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}_{\text{gr}})$  четно-однородно тогда и только тогда, когда на него поднимается некоторая подалгебра  $\alpha$ , расщепляющая (1). В этом случае супермногообразии  $(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O})$  является четно-однородным относительно  $\alpha$ . В нашем случае с точностью до автоморфизма из  $\text{Aut } \mathbf{E}$  существует одна расщепляющая подалгебра  $\alpha \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ , которую можно задать следующим базисом [5]:

$$e = \frac{\partial}{\partial x}, \quad h = -2x \frac{\partial}{\partial x} - \nabla, \quad f = -x^2 \frac{\partial}{\partial x} - x \nabla,$$

где

$$\nabla = 7\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + 5\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + 2 \left( \xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} + \xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_4} \right).$$

Рассмотрим подпучок  $\text{Aut}_{(2)}\text{O}_{\text{gr}} = \exp((T_{\text{gr}})_2 \oplus (T_{\text{gr}})_4)$  пучка  $\text{Aut O}_{\text{gr}}$ . Согласно теореме Грина (Р. Green), множество супермногообразий с заданным ретрактом  $(M, \text{O}_{\text{gr}})$  изоморфно множеству орбит группы  $\text{Aut}(E)$  на множестве  $H^1(M, \text{Aut}_{(2)}\text{O}_{\text{gr}})$ . Будем описывать когомологии с помощью коциклов Чеха в покрытии  $U = \{U_0, U_1\}$ .

**Предложение 1 ([3]).** *Предположим, что  $n < 6$  и  $H^0(M, (T_{\text{gr}})_2) = \{0\}$ . Пусть заданы такие подпространства  $Q_{2p} \subset Z^1(U, (T_{\text{gr}})_2)$  ( $p = 1, 2$ ), что каждый класс когомологий из  $H^1(M, (T_{\text{gr}})_2)$  содержит ровно по одному коциклу из  $Q_{2p}$  ( $p = 1, 2$ ). Тогда любой класс когомологий из  $H^1(M, \text{Aut}_{(2)}\text{O}_{\text{gr}})$  представляется единственным коциклом вида  $z = \exp(u^2 + u^4)$ , где  $u^2 \in Q_2$ ,  $u^4 \in Q_4$ .*

Будем задавать супермногообразие  $(M, O)$  коциклом  $u^2 + u^4$ , подразумевая, что  $(M, O)$  соответствует коциклу  $z = \exp(u^2 + u^4)$ .

Используя метод, изложенный в разделе 2 работы [6], можно доказать, что:

- 1) справедливо равенство  $H^0(\mathbf{CP}^1, (T_{\text{gr}})_2) = \{0\}$ ;
- 2) можно вычислить базис пространства  $H^1(\mathbf{CP}^1, (T_{\text{gr}})_q)$ ,  $q = 2, 4$ .

Проведем исследование на четно-однородность супермногообразий с ретрактом  $\mathbf{CP}_{8,5,3,2}^{14}$ . Обозначим через  $H^1(\mathbf{CP}^1, T_{\text{gr}})^\alpha$  множество  $\alpha$ -инвариантных классов когомологий.

**Предложение 2.** *Базис пространства  $H^1(\mathbf{CP}^1, (T_{\text{gr}})_2)^\alpha$ , может быть представлен следующими коциклами:*

$$x^{-1} \xi_3 \xi_4 \frac{\partial}{\partial x}, x^{-1} \xi_2 \xi_3 \xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_1}.$$

Кроме того,  $H^1(\mathbf{CP}^1, (T_{\text{gr}})_4)^\alpha = \{0\}$ .

Пусть  $\lambda_2: \text{Aut}_{(2)}\text{O}_{\text{gr}} \rightarrow (T_{\text{gr}})_2$  – гомоморфизм пучков, сопоставляющий каждому ростку автоморфизма  $\alpha$  2-компоненту элемента  $\log \alpha$  в  $(T_{\text{gr}})_2 \oplus (T_{\text{gr}})_4$ . Из предложения 1 и 2 можно вывести

**Предложение 3.** *Если  $\alpha$  – подалгебра, расщепляющая последовательность (1) и если  $H^1(\mathbf{CP}^1, \text{Aut}_{(2)}\text{O}_{\text{gr}})^\alpha$  – множество классов, определяющих четно-однородные относительно  $\alpha$  супермногообразия, то  $\lambda_2^*$  биективно отображает это множество на  $H^1(\mathbf{CP}^1, (T_{\text{gr}})_2)^\alpha$ .*

Из этого предложения следует, что четно-однородные относительно  $\alpha$  супермногообразия можно представить коциклами вида  $u^2 + u^4$ , где класс  $[u^2]$   $\alpha$ -инвариантен, а класс  $[u^4]$  может быть определен с помощью предложения 5.1 из [7]. Заметим, что  $\alpha$ -инвариантные классы  $[u^2]$  описаны ранее в предложении 2. Проверив, что для них  $[u^2; u^2] = 0$ , из предложения 5.1 работы [7] получаем, что класс  $[u^4]$  также должен быть  $\alpha$ -инвариантным.

**Предложение 4.** Для любой расщепляющей подалгебры  $\alpha$  четно-однородные относительно  $\alpha$  супермногообразия задаются коциклами из предложения 2.

Исследуем на однородность полученные четно-однородные супермногообразия с ретрактом  $\mathbf{CP}_{8,5,3,2}^{1|4}$ . В [1] доказано

**Предложение 5.** Пусть выполнены условия предложения 1, и пусть супермногообразия  $(\mathbf{CP}^1, O)$  является четно-однородным относительно  $\alpha_i$ . Супермногообразия  $(\mathbf{CP}^1, O)$  однородно тогда и только тогда, когда

векторные поля  $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$  для  $j = 1, \dots, 4$  поднимаются на  $(\mathbf{CP}^1, O)$ .

Сформулируем окончательный результат.

**Теорема.** Существует единственное однородное нерасщепимое супермногообразие с ретрактом  $\mathbf{CP}_{8,5,3,2}^{1|4}$ , представимое коциклом

$$x^{-1} \xi_2 \xi_3 \xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_1}.$$

**Доказательство.** Рассмотрим коциклы, указанные в предложении 2, и применим к ним предложение 5. Используя критерий подъема из [7] (предложение 5.1) получаем, что нерасщепимые однородные супермногообразия задаются ненулевым коциклом, приведенным в формулировке теоремы.  $\square$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Башкин М.А.* Однородные нерасщепимые супермногообразия с ретрактом  $\mathbf{CP}_{6,4,2,2}^{1|4}$  // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 11. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2016. С. 13–19.
2. *Башкин М.А.* Об одном семействе Кураниси // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 15. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2020. С. 9–13.
3. *Башкин М.А.* Одно семейство однородных нерасщепимых супермногообразий над сферой Римана // Вестник РГАТУ им. П.А. Соловьева. 2015. №3(34). С. 125–130.
4. *Башкин М.А.* О спектральной последовательности супермногообразия // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 17. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2021. С. 8–12.
5. *Bunegina V.A.* Homogeneous supermanifolds associated with the complex projective line / V.A. Bunegina, A.L. Onishchik // J. Math. Sci. 1996. V. 82. P. 3503–3527.
6. *Вишнякова Е.Г.* Четно-однородные комплексные супермногообразия размерности  $1|3$  на сфере Римана // Современные проблемы математики и информатики: сб. науч. тр. молодых ученых, аспирантов и студентов. Вып. 7. Ярославль: ЯрГУ, 2005. С. 22–30.
7. *Onishchik A.L.* A Construction of Non-Split Supermanifolds // Annals of Global Analysis and Geometry. 1998. V. 16. P. 309–333.

УДК 539.17:539.126:631.48

**А. А. Залуцкий, В. В. Морозов, А. Ю. Соколов,  
Е. Н. Школьников**

Ярославский государственный технический университет  
Россия, г. Ярославль, e-mail: zalutskii@mail.ru

**МЕССБАУЭРОВСКАЯ ДИАГНОСТИКА  
ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ 2D-РАЗМЕРНЫХ СЛОЕВ ВОДЫ  
НА ПОВЕРХНОСТИ МОНТМОРИЛЛОНИТА**

*При использовании зондовой методики, разработанной на базе мессбауэровского изотопа  $^{57}\text{Fe}$  в двух формах ( $\text{Fe}^{2+}$  и  $\text{Fe}^{3+}$ ), установлен каскад фазовых переходов в системе «замороженная вода-глинистый минерал». Широкий набор критических температур систематизирован в рамках концепции «долин», традиционно применяемой в физике стекольных переходов. Из множества вариантов для двумерного льда предложены два сценария его плавления, выбор которых основывался на параметрах мессбауэровских спектров. Привлечение экспериментальных данных позволило выявить конкретный сценарий пути установления и развития хаоса в детерминированной системе.*

**Ключевые слова:** мессбауэровская спектроскопия, сценарий плавления, каскад фазовых переходов

**A. A. Zalutskii, V. V. Morozov, A. Y. Sokolov,  
E. N. Shkolnikov**

Yaroslavl State Technical University  
Yaroslavl, Russia, e-mail: zalutskii@mail.ru

**MOSSBAUER DIAGNOSTICS OF DYNAMIC  
PROPERTIES OF 2D-DIMENSIONAL WATER LAYERS  
ON THE SURFACE OF MONTMORILLONITE**

*When using the probe technique developed on the basis of the Mossbauer isotope  $^{57}\text{Fe}$  in two forms ( $\text{Fe}^{2+}$  and  $\text{Fe}^{3+}$ ), a cascade of phase transitions in the "frozen water-clay mineral" system was established. A wide range of critical temperatures is systematized within the framework of the concept of "valleys", traditionally used in the physics of glass transitions. Of the many options for two-dimensional ice, two scenarios of its melting were proposed, the choice of which was based on the parameters of the Mossbauer spectra. The use of experimental data allowed us to find out a specific scenario of the way of establishing and developing chaos in a deterministic system.*

**Keywords:** Mossbauer spectroscopy, melting scenarios, cascade of phase transitions

**Введение.** Теория идеальной кристаллической решетки в гармоническом и/или квазигармоническом приближении вполне адекватно предсказывает ожидаемую в эксперименте картину в достаточно широком диапазоне температур. Но вблизи фазовых переходов (особенно, в точках плавления кристаллов) наблюдается сильно аномальный характер поведения физических параметров, чье поведение не может быть объяснено теорией идеальной решетки. Не лучшим образом обстоит дело в случае применения теории Марадудина и Флинна [1]. Несмотря на то что она аккуратно учитывала широкий набор вкладов в коэффициент Дебая-Уоллера решетки Браве (ангармонические члены разложения потенциальной энергии до 4-го порядка включительно), тем не менее отсутствовала какая-либо корректная корреляция с рентгенографическими данными [2].

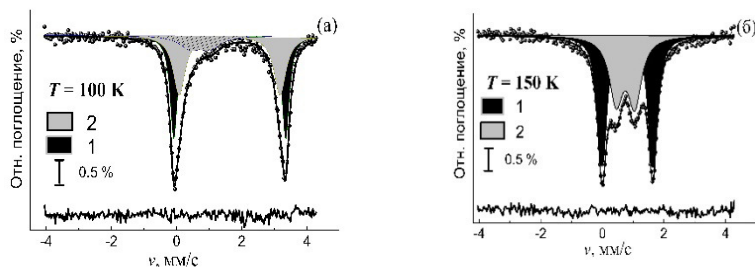
Детальный анализ литературных данных показал, что экспериментально зафиксированные отклонения от предсказаний дебаевской модели твердого тела при низких и высоких температурах наилучшим образом укладываются в рамки кластерного подхода, предложенного Ю.И. Петровым в середине 80-х годов прошлого века [2]. Так процесс плавления кристалла в рамках этого подхода представляется как кооперативное изменение характера движения кластеров, т.е. переход от колебательного движения к случайному броуновскому. Именно так и обстоит дело с данными по диффузионным процессам, полученными для системы «лед-алюмосиликатная подложка» методом МС [3, 4].

Вне зависимости от того, что изученные нами явления находят простое и естественное объяснение в рамках кластерной модели, имеется целый ряд нерешенных задач. Первый блок поиска решений относится к установлению причин (или физических механизмов) появления в кристалле метастабильных группировок атомов (кластеров), обладающих повышенной локальной устойчивостью, но иной по сравнению с решеткой симметрией. Второй блок связан с попыткой описать с единой физической точки зрения достаточно большое разнообразие (или каскад) фазовых переходов (ФП) в системе «лед-алюмосиликатная подложка», установленных в мессбауэровском эксперименте [5].

Целью настоящей работы – разработать методический подход, который смог бы описать с единых позиций (по крайней мере, на качественном уровне) широкий набор фазовых явлений в неравновесной системе «нанопленки замороженной воды-глина».

Зондовая МС является эффективным методом при исследовании аморфных фаз кристаллов, образно названных автором обзора [6] как «грязь». При этом по предложению того же автора «...настало время не вымывать эту «грязь», а исследовать ее (что, впрочем, уже и делается...)». Именно этому и посвящена настоящая статья.

**1. Методика эксперимента.** Для решения поставленной в настоящей работе задачи были выбраны два валентных состояния мессбауэровского зонда  $^{57}\text{Fe}$ . Первый тип представлял собой суперпозицию двух парциальных спектров с параметрами, типичными для катионов  $\text{Fe}^{2+}$ , находящихся в высокоспиновом состоянии и двух неэквивалентных положениях (формы 1, 2 на рис. 1, а). Экспериментальный спектр второго типа характерен для трехвалентного железа, состоящего из димеров железа и аморфных полимерных пленок («кластеров») (1 и 2 на рис. 1, б соответственно).



**Рис. 1. Модельная расшифровка мессбауэровских спектров зондовых атомов  $^{57}\text{Fe}$  в системе «лед–поверхность монтмориллонита»: 1 – форма 1 для  $\text{Fe}^{2+}$ ; 2 – форма 2 для  $\text{Fe}^{2+}$  (а); 1 – димеры  $\text{Fe}^{3+}$ , 2 – кластеры  $\text{Fe}^{3+}$  (б)**

Мессбауэровские параметры для указанных выше типов зонда  $^{57}\text{Fe}$  подробно представлены в [7]. Привлечение в исследуемую систему алюмосиликатной поверхности объяснимо процессом гидратации монтмориллонита (со структурным слоем типа 2:1), т.е. образованием на поверхности глинистых частиц сплошной гидратной пленки «связанной» воды, отличающейся по своим свойствам от «свободной» воды. Толщина водного слоя оказалась кратна толщине одноатомного водного слоя, соответствующего структуре льда. Это было использовано при приготовлении образцов для решения поставленных задач, поскольку при фиксированной влажности объекта между алюмосиликатными пластинами может укладываться целое число монослоев воды.

Представленные в работе объекты следует отнести к системам с конкурирующими взаимодействиями. Поэтому для нас в качестве эффективных моделей (как в теоретическом или практическом аспекте) наиболее пригодными оказались спиновые стекла (СС). Это связано с тем, что физика процессов в СС не является чем-то изолированным или единичным, а может служить прообразом искомой физики для всех других систем аналогичного типа. Хорошая иллюстрация подобной методики представлена в [6], где подробно описаны исследования системы дефектов кристалличе-



ского строения посредством использования физики спинового стекла. С учетом сказанного и подбиралась адекватная концентрация мессбауэровских зондов, позволяющая говорить не об автономном поведении зонда в поле своих соседей, а о самосогласованном поведении всего их ансамбля. Степень «дефектности» контролировалась толщиной адсорбированной пленки воды на поверхности алюмосиликата, благодаря описанному выше свойству глины «квантовать» слои жидкости.

Для проведения мессбауэровских температурных исследований (90–330 К) использовали стандартный спектрометр, работающий в режиме постоянного ускорения источника  $^{57}\text{Co}$  (Сг). Математическую обработку экспериментальных спектров осуществляли с помощью программного комплекса MStools [8].

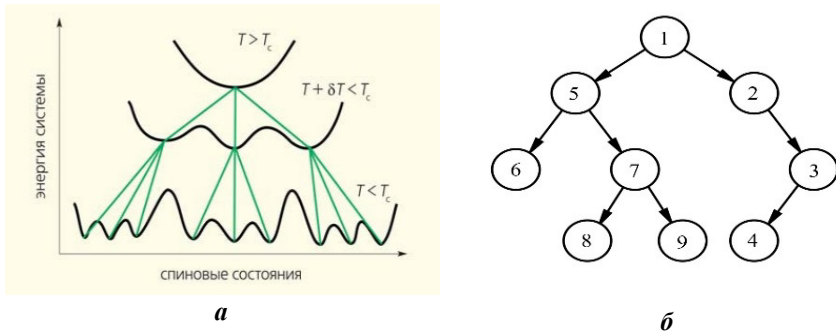
## **2. Результаты и их обсуждение**

### ***2.1. Разработка единого подхода для анализа энергетических ландшафтов по данным мессбауэровского эксперимента.***

Ранее нами с помощью метода МС был экспериментально зафиксирован непрерывный каскад ФП, наглядно демонстрирующий нарушение эргодичности в изучаемой системе. Такое поведение характерно для неупорядоченных объектов и, как было показано в многочисленных обзорах [9], для широкого класса систем, получившим общее название – спиновые стекла. Другим признаком отнесения нашей системы к СС может служить сама методика приготовления образца. Процедура надежного поиска нужного состояния (например, глубокого минимума «энергии») в случае СС зависит от «истории системы». В нашем случае процедура искомых локальных минимумов энергии экспериментально подтвердилась фиксацией при медленном охлаждении расплава «нанопленки воды-подложка» кристаллических форм льда ( $I_c$ ,  $I_h$ ), тогда как при быстром – кристаллическое состояние не успевает сформироваться. Здесь возникает состояние «стеклового» характера, определяемое с помощью зондовой МС как аморфные фазы льда различной плотности (величины плотности и вязкости см., например, в [4]).

Основопологающим физическим процессом в СС ниже  $T_c$  является вырождение равновесного состояния, которое формально заключается в появлении в системе большого числа энергетических минимумов, или так называемых «долин». Теоретический аспект и условия необходимости введения понятия «долина» подробно описаны в литературе [9], а качественная картина их появления следующая. При температуре ниже  $T_c$  происходит нарушение эргодичности системы, т.е. фазовое пространство разделяется не на два, как при обычном ФП, а на много (для макроскопической системы бесконечное число) «долин», разделенных бесконечными барьерами

свободной энергии. При этом число «долин» при уменьшении температуры непрерывно увеличивается по причине каскада ФП, вызванного индуцируемой беспорядком фрустрацией системы. Действительно, каждая долина распадается на множество новых, и процесс разбиения состояний системы на все меньшие и меньшие долины может продолжаться непрерывно (рис. 2, а). В результате пространство энергетических состояний СС представляет собой ультраметрическое пространство бесконечного числа долин с близкими энергиями.



**Рис. 2.** Иерархическая структура энергий состояний спинового стекла при различных температурах [9] (а) и аналог «дерева» состояний системы «лед-подложка», построенный на базе данных мессбуаэровского эксперимента (б)

Отметим, что эти различные состояния СС не носят хаотичный характер, а напротив, могут быть организованы в виде иерархической структуры. Для большей наглядности множество различных «локально устойчивых» минимумов энергии СС удобнее изображать в форме своеобразной «древесной» структуры, впервые предложенной Д. Паризи [10]. Серия теоретических работ Д. Паризи, опубликованных преимущественно в 1980-х годах, посвящена принципиально новому математическому описанию неупорядоченных систем, и их автор в 2021 году был отмечен Нобелевским комитетом премией.

Экспериментальное подтверждение наличия теоретически предсказанного Паризи иерархического дерева спин-стекольных состояний для системы «нанопленки воды – подложка» выполним с помощью двухэтапного подхода. Первый этап подхода носил ограниченный (по своему содержанию) характер, поскольку для его построения использовался только информационный блок по фазовым температурам. Но даже в таком ограниченном формате данные были систематизированы, и для удобства перехода ко второму этапу анализа их можно представить в виде нерегулярно-

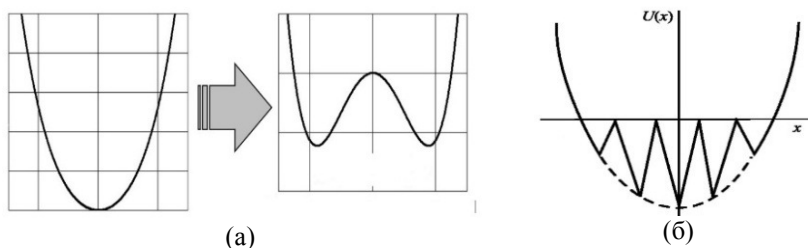
го «дерева» с переменной ветвистостью (рис. 2, б). При этом отметим, что полученное таким искусственным способом «дерево» имеет сильно асимметричный вид. Видно, что узлы левой ветви имеют тенденцию к раздваиванию (точки 5 или 7 на рис. 2, б), в то время как для правой ветви подобной картины не наблюдалось.

На втором этапе можно придать каждому виду ветви физическое содержание, используя при этом поведение параметров спектров применяемых зондов. Для модельного описания динамики подобных систем в наличии имеется много подходов и наиболее приемлемым для нас оказался метод, основанный на концепции случайных блужданий по дереву. Для нашей системы процедуру анализа целесообразно проводить для каждой ветви в отдельности.

Для правой ветви (точки 1-4) диффузионные процессы в фазовом пространстве со многими локальными минимумами можно рассматривать как задачу случайного блуждания по древовидной структуре. При этом иерархическая система может иметь спектр  $1/f$ -шума (в силу теоремы [11]), если лежащее в основе дерево является «метлой», т. е. имеет исчезающий силуэт. Экспериментальным подтверждением подобного силуэта дерева являются наши данные, которые следуют из анализа вида поверхностей потенциальной энергии (рис. 3, а), полученного из уравнения для нелинейного осциллятора (с помощью модернизации системы уравнений Лоренца для изучаемого объекта). При этом значения величин математических параметров были восстановлены из мессбауэровского эксперимента, а аргументация по установлению конкретного вида шума более детально будет рассмотрена нами ниже.

Для левой ветви нашего «дерева» характерно то, что локальные минимумы ландшафтов могут образовывать своеобразные области минимумов (согласно [12] «бассейны»), вложенные друг в друга иерархическим образом: бассейны меньшего масштаба вложены в бассейны большего размера, а те в свою очередь в еще большего масштаба бассейны и т. д.

Первым экспериментальным подтверждением сказанному может служить температурное поведение мессбауэровских параметров спектров для системы «димеры – минерал», которое корректно удалось описать в рамках модели «ограниченной» диффузии [7]. При этом на основе применения уравнения Ланжевена для броуновской частицы процесс взаимодействия ионов  $Fe^{3+}$  с плотной окружающей средой (случай большого трения) можно имитировать «частоколом» из потенциальных барьеров. Тогда потенциал возможно описать формулой для гармонического осциллятора, огибающая которого формально соединяла «гребенку» минимумов потенциальных энергий (рис. 3, б).



**Рис. 3.** Эволюция поверхностей потенциальной энергии зондовых атомов  $^{57}\text{Fe}$  в системе «лед–поверхность монтмориллонита»: а – иерархическая структура долины (дерево в форме «метла»); б – граф в форме «баньяновое дерево»

Полученный с помощью зондовой МС результат позволяет представить энергетический ландшафт нашей системы в виде набора бассейнов, внутри каждого имеются активационные барьеры одного и того же масштаба. При этом форма ландшафта (в виде иерархического графа «баньяновое дерево») не противоречит результату, полученного методами компьютерного моделирования [12].

Вторым подтверждением может служить экспериментальный факт по обнаружению фрактального перехода «Губка Менгера» → «Пыль Канторова», представляющий собой на топологическом языке трансформацию одного монофрактала ( $d_f = 2,70$ ) в другой ( $d_f = 0,616$ ), отличный от первого величиной  $d_f$ . Установление методом МС масштабного самоподобия достоверно говорит только в пользу присутствия в системе иерархии бассейнов локальных минимумов и активационных барьеров на энергетических ландшафтах. В то же время нельзя не учитывать возможность наличия в системе скачкообразных переходов между бассейнами, получивших название «basin-to-basin kinetics» [12]. Однако подобные переходы описываются с использованием р-адических моделей ультраметрической диффузии, и математический анализ в рамках применения р-адических чисел выходит за формат настоящей статьи.

## **2.2. Зондовая мессбауэровская диагностика строения и свойств 2D-размерных слоев воды на подложке монтмориллонита**

В реальном мире мы практически живем между двумя (2D) и тремя (3D) измерениями. В фактическом поведении одна и та же пленка в зависимости от внешних условий может быть как двух-, так и трехмерной, или даже иметь дробную размерность. При этом могут фиксироваться взаимные переходы (2D ↔ 3D), а также наблюдаться остатки или следы двумерной физики в чисто объемных, казалось бы, на первый взгляд системах.

Ранее нами были выполнены оценки величин (толщины, плотности, вязкости) для квазижидкого слоя (КЖС) воды и/или набора ряда упругих

параметров (модуль сдвига, коэффициент Пуассона, параметр Грюнайзена) для гексагонального льда [4]. Однако 2D-геометрия изучаемой системы, если и предполагалась, то без должной при этом аргументации. В пользу предположения может только косвенно говорить сама методика приготовления образцов, поскольку форма изотермы адсорбции монтмориллонита при различном диапазоне равновесных относительных давлений паров воды ( $P/P_0$ ) имела вид «ступеней». Образно говоря, подобная экспериментальная зависимость, по емкому замечанию Дж. Г. Дэша, представляла собой «лестницу, ведущую в физику двух измерений».

Усилим достоверность нашего предположения (присутствие 2D-льда в нашей системе) тремя фактами: первое условно можно связать с геометрией самого объекта, а два других – непосредственно с физикой ФП. Экспериментально установленная анизотропия коэффициента диффузии ( $|D_{\perp} - D_{\parallel}|/D_{\perp} \cong 25\%$ ) [3] для мессбаэровского зонда  $\text{Fe}^{2+}$  в адсорбированных водных пленках на глинистой подложке может быть объяснима геометрией системы: атомы железа имеют большую свободу в своем движении в параллельной плоскости по сравнению с более сильно закрепленными атомами в перпендикулярном направлении относительно базальных плоскостей ( $d_{001}$ ) подложки. Таким образом, полученный факт ограничения движения мессбаэровской метки в замороженных пленках воды говорит в пользу наличия в системе 2D-льда.

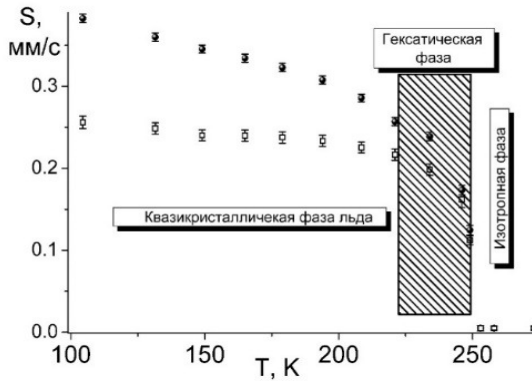
Известно, что использование теории подобия при анализе физики ФП [13] позволяет связать температурную зависимость параметра порядка (в нашем случае его роль выполнял фактор Лэмба-Мессбаэра ( $f' \approx S(T)$ )) вблизи точки перехода ( $T_c$ ) с последующим определением критического индекса. Найденная в мессбаэровском эксперименте величина индекса ( $\beta \cong 0,13$ ) практически совпадает со значением  $1/8$ , вытекающем из теории для двумерных систем. Поскольку экспериментально полученный критический показатель хорошо согласуется с предсказанием двумерной модели в довольно широком диапазоне температур, то это дает нам право считать пленку замороженной воды двумерной.

Наиболее ярче (лучше сказать эффективнее) разница физических свойств между 2D- и 3D-измерениями проявляется при изучении процессов плавления. Действительно, если в случае с «объемным» или 3D-льдом плавление всегда происходит посредством ФП первого рода, то в «поверхностном» или 2D-льдом – процесс может состоять, как правило, из множества вариантов сценариев плавления. Современное физическое состояние достижений, связанных с диагностикой сценариев, сконцентрированы в обзоре [14]. С другой стороны, использование зондовой МС как эффективного поверхностного чувствительного метода при исследовании многослойных структур известно давно. Тем не менее данных по детальному

обнаружению и разделения границ между 3D- и 2D-льдом методом МС просто нет.

Для устранения пробела воспользуемся разработанной 50 лет назад Березинским, Костерлицем и Таулесом теорией (БКТ-теория), за которую в 2016 г. Костерлиц и Таулес получили Нобелевскую премию. БКТ-теория до сих пор служит мощным стимулом к изучению двумерных систем самой различной природы, и наши объекты не являются каким-либо исключением.

Первым и наиболее известным сценарием плавления 2D-систем является двухступенчатый процесс, состоящий из двух непрерывных БКТ-переходов с промежуточной анизотропной жидкостью – гексатической фазой (ГФ). Реализацию подобной схемы плавления можно проиллюстрировать температурной зависимостью фактора Лэмба-Мессбауэра ( $f' \approx S(T)$ ) для зонда  $Fe^{3+}$ , предварительно разбитую согласно предполагаемому сценарию на соответствующие области (рис. 4). С другой стороны, в наличии имеется второй сценарий (по результатам компьютерного моделирования [15]), согласно которому плавление может происходить посредством двух переходов с промежуточной жидкостью, но в отличие от первого сценария кристалл переходит в ГФ посредством непрерывного БКТ-перехода, а гексатик превращается в изотропную жидкость через ФП первого рода.



**Рис. 4.** Сценарий плавления 2D-льда, базирующийся на температурном поведении вероятности эффекта Мессбауэра ( $f' \propto S$ )

Попробуем согласовать данные из мессбауровского эксперимента с описанными выше сценариями. Постоянная конкуренция между ФП первого рода и БКТ-переходом (см., например, [16]) несложно снимается с помощью проверки энергетического соотношения ( $E_c \geq 2.84k_B T$ , где  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура перехода). Так механизм БКТ-

перехода выполняется при этом условии, тогда как в противоположном случае процесс плавления индуцируется трансформацией границ зерен. При этом наряду со значением  $E_c$  можно дополнительно получить информацию о наличии в системе ФП первого рода (анализ поведения параметров спектра для зонда  $Fe^{2+}$  вблизи  $T_c$  (см., например, в [5]). Однако имеется первый сложный момент, связанный с не совсем резким проявлением БКТ-перехода и его «размытие» в непосредственной близости к критической температуре обусловлено паразитическим влиянием 3D-эффектов.

На основании современных данных о формах льда в совокупности с методическими возможностями МС установлено, что в 2D-льде в зависимости от толщины водного слоя могут реализовываться оба сценария его плавления. При этом ГФ представляет собой ГС, а квазикристаллическая фаза – смесь кристаллических «объемных» ( $I_c$ ,  $I_h$ ) и метастабильных (аморфных) форм льда низкой плотности.

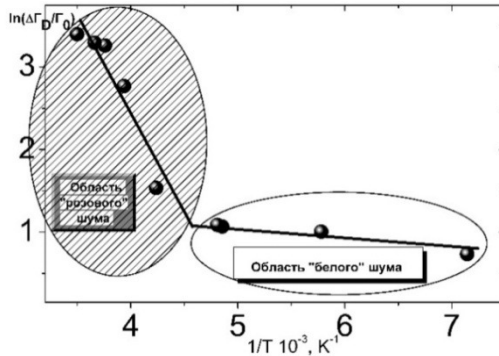
### ***2.3. Диагностика основных типов шума с помощью метода МС***

Экспериментальные данные по применению методики МС для исследования стохастических процессов (СП) или динамического хаоса (ДХ) практически отсутствуют. Одно приятное исключение может составлять только серия экспериментов, которая базировалась на модели броуновского осциллятора с сильным затуханием и формально описывалась в рамках «белого» шума (БШ).

Полученный нами материал целесообразно разбить на две группы. Первая группа обязана тому факту, что при описании равновесных флуктуаций в исследованных средах применялась модель, предполагающая воздействие на частицы среды случайных сил, имеющих в низкочастотной части спектр БШ. Для второй группы характерен другой тип флуктуаций, который описывался фликкер-шумом (ФШ) (или  $1/f$ -шумом), наблюдающимся обычно в локально-неравновесных средах и характеризующимся очень сильными временными корреляциями. Возможные области шума, реализуемые в системе «замороженный раствор-монтмориллонит», были диагностированы методом МС и для наглядности представлены на рис. 5. Здесь существенно то, что наиболее наглядно шум  $1/f$  проявляет себя в тех слоях замороженной жидкости, которые по своей «структуре» соответствуют «Пыли Канторова».

В качестве количественного показателя, позволяющего контролировать присутствие в системе фликкер-шума ( $1/f$ -шума), можно предложить параметр Хоуге (или соотношение Хоуге) [18]. Для чего были проанализированы две серии экспериментальных данных, в которых первая группа представляет собой результат «чистого» использования методики МС для системы «железо-алюмосиликатная поверхность», а вторая – классический эксперимент, характерный при применении методики фликкер-шумовой

спектроскопии, но только с контролем необходимых параметров опыта с использованием метода МС. В результате был определен диапазон значений параметра Хоуге ( $\alpha = (1,07 \div 1,64) \cdot 10^{-3}$ ), позволяющий констатировать наличие  $1/f$ -шума в системе «железо-алюмосиликатная поверхность».



**Рис. 5. Схема возможных областей шума в системе «замороженный раствор-монтмориллонит» и базирующаяся на температурном поведении мессбауэровского параметра  $\Delta\Gamma(T)$**

Интерес может представлять не только сам по себе хаос, но и путь его установления в детерминированной системе. Количественное решение задачи по выяснению сценария развития хаоса требует проведения численных исследований или наукоемких в математическом аспекте экспериментов (см. строки № 1-4 в табл. 1). Поэтому с целью проведения наиболее эффективного решения поставленной задачи и одновременно получения из нее «быстрого» ответа была разработана специальная методика, апробированная данными из мессбауэровского эксперимента (см. строку № 5 в табл. 1).

**Таблица 1. Значения универсального параметра ( $\delta$ ) при различных сценариях перехода к хаосу**

№	$\delta$	Вид сценария	Методика получения
1.	4,6692016	Удвоение периода	Математический эксперимент (одномерное отображение)
2.	4,19244418	Удвоение периода	Математический эксперимент (двумерное отображение)
3.	2,83361	Квазипериодический	Математический эксперимент (отображение окружности на себя)
4.	2,8	Квазипериодический	Физический эксперимент (система Рэля-Бенара)
5.	2,833(3)	Квазипериодический	Физический эксперимент (метод МС)



**Закключение.** Представленный в статье фактический материал не только расширяет методические возможности МС применительно к чисто природным системам, но и позволяет подтвердить ранее созданные модельные представления в смежных и даже, кажущихся на первый взгляд, далеких друг от друга научных областях.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Maradudin A.A.* Anharmonic Contributions to the Debye-Waller Factor / A.A. Maradudin, P.A. Flinn // *Physical Review*. 1963. V. 129(6). P. 2529-2547.
2. *Петров Ю.И.* Кластеры и малые частицы. М.: Наука, 1986. 366 с.
3. *Залуцкий А.А.* Особенности механизмов диффузии и динамических свойств мессбауэровских атомов железа на поверхности наноглин // *Физикохимия поверхности и защита материалов*. 2016. Т. 52, № 1. С. 30-40.
4. *Залуцкий А.А.* Зондовая мессбауэровская диагностика свойств квазижидкого слоя воды на алюмосиликатной поверхности природного происхождения // *Кристаллография*. 2020. Т. 65, № 3. С. 384-389.
5. *Залуцкий А.А.* Изучение особенностей фазовых переходов в системе «железо-поверхность наноглин» с помощью мессбауэровской спектроскопии // *Письма в ЖТФ*. 2014. Т. 40, вып. 20, С. 54-61.
6. *Олемской А.И.* Эволюция дефектной структуры твердого тела в процессе пластической деформации / А.И. Олемской, И.А. Скляр // *УФН*. 1992. Т. 162, № 6. С. 29-79.
7. *Залуцкий А.А.* Физические методы исследования твердофазных реагентов и катализаторов / А.А. Залуцкий, Е.Г. Степанов. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2005. 312 с.
8. *Русаков В.С.* Мессбауэровская спектроскопия локально неоднородных систем. Алматы: Изд-во ИЯФ НЯЦ РК, 2000. 431 с.
9. *Доценко В.С.* Физика спин-стекольного состояния // *УФН*. 1993. Т. 163, № 6. С. 1-37.
10. *Nature of the Spin-Glass Phase / M. Mézard, G. Parisi, N. Sourlas, G. Toulouse, M. Virasoro // Physical Review Letters*. 1984. V. 52(13). P. 1156-1159.
11. *Bachas C.P.* Complexity and the Relaxation of Hierarchical Structures / C.P. Bachas, V.A. Huberman // *Physical Review Letters*. 1986. V. 57(16). P. 1965-1969.
12. *Becker O.M.* The topology of multidimensional potential energy surfaces: Theory and application to peptide structure and kinetics / O.M. Becker, M. Karplus // *The Journal of Chemical Physics*. 1997. V. 106(4). P. 1495-1517.
13. *Паташинский А.З.* Флуктуационная теория фазовых переходов / А.З. Паташинский, В.Л. Покровский. М.: Наука, 1982. 382 с.
14. *Рыжов В.Н.* Переход Березинского – Костерлица–Таулеса и двумерное плавление / В.Н. Рыжов, Е.Е. Тареева, Ю.Д. Фомин, Е.Н. Циок // *УФН*. 2017. Т. 187, № 9. С. 921-951.
15. *Bernard E.* Two-Step Melting in Two Dimensions: First-Order Liquid-Hexatic Transition / E. Bernard, W. Krauth // *Physical Review Letters*. 2011. V. 107(15). P. 155704–1-155704–4.
16. *Binder K.* The liquid-solid transition of hard discs: first-order transition or Kosterlitz-Thouless-Halperin-Nelson-Young scenario? / K. Binder, S. Sengupta, P. Nielaba // *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2002. V. 14(9). P. 2323-2333.
17. *Chudnovsky E.M.* Hexatic vortex glass in disordered superconductors. // *Physical Review B*. 1989. V. 40(16). P. 11355-11357.
18. *Hooge F.N.*  $1/f$  noise is no surface effect // *Physics Letters A*. 1969. V. 29(3). P. 139-140.

УДК 517.925

### В. Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет  
Россия, г. Ярославль, e-mail: vroitenberg@mail.ru

## О НЕКОТОРЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ БИФУРКАЦИЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С СИММЕТРИЕЙ

*Для двухпараметрических семейств векторных полей на плоскости, инвариантных относительно вращений на углы  $2\pi k/n$ ,  $k=1,2,\dots,n-1$ , рассматриваются два случая. В первом случае предполагается, что при нулевых значениях параметров векторное поле имеет контур из  $n$  седел с нулевой седловой величиной и их сепаратрис, инвариантный относительно вращений. Во втором случае предполагается, что при нулевых значениях параметров векторное поле имеет контур из  $n$  седло-узлов,  $n$  грубых седел и их сепаратрис, инвариантный относительно вращений. В ситуации общего положения описываются бифуркационные диаграммы таких семейств.*

**Ключевые слова:** векторное поле на плоскости, вращения плоскости, сепаратрисный контур, бифуркационная диаграмма

### V. Sh. Roitenberg

Yaroslavl State Technical University  
Russia, Yaroslavl, e-mail: vroitenberg@mail.ru

## ON SOME NONLOCAL BIFURCATIONS OF DYNAMICAL SYSTEMS WITH SYMMETRY

*We consider two cases for two-parameter families of vector fields on the plane, invariant with respect to rotations through angles  $2\pi k/n$ ,  $k=1,2,\dots,n-1$ . In the first case, it is assumed that, at zero values of the parameters, the vector field has a contour of  $n$  saddles with zero saddle value and their separatrixes, which is invariant under rotations. In the second case, it is assumed that at zero values of the parameters, the vector field has a contour of rough nodes,  $n$  rough saddles and their separatrixes, which is invariant under rotations. In a generic situation, bifurcation diagrams of such families are described.*

**Keywords:** planar vector field, rotation of the plane, separatrix contour, bifurcation diagram

**Введение.** Локальные бифуркации в классах систем с различного вида симметрий изучались в ряде статей [1–5]. Некоторые нелокальные бифуркации систем с центральной симметрией описаны в [6–10].

Здесь мы исследуем нелокальные бифуркации в классе систем на плоскости, инвариантных относительно конечной группы вращений.

Пусть  $\mathfrak{X}^r(D)$  – банахово пространство всех  $C^r$ -векторных полей в круге  $D = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$  с  $C^r$ -нормой, а  $\mathfrak{X}^r(D, n)$  – его подпространство, состоящее из векторных полей  $X$ , инвариантных относительно поворотов плоскости на углы  $\phi_k = 2\pi k/n$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , то есть таких, что  $X(\mathcal{R}_k x) = \mathcal{R}_k X(x)$ , где  $\mathcal{R}_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{R}_k x := (x_1 \cos \phi_k - x_2 \sin \phi_k, x_1 \sin \phi_k + x_2 \cos \phi_k)$ .

Будем рассматривать семейства  $\{X_\varepsilon\}$  векторных полей

$$X_\varepsilon(x) = P_1(x, \varepsilon)\partial/\partial x_1 + P_2(x, \varepsilon)\partial/\partial x_2 \in \mathfrak{X}^r(D, n), \quad P_1, P_2 \in C^r \quad (r \geq 3),$$

зависящих от двумерного параметра  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ , меняющегося в окрестности нуля, трансверсально пересекающие при  $\varepsilon = 0$  подмногообразия ко-размерности два в пространстве  $\mathfrak{X}^r(D, n)$ .

**1. Бифуркации контура, образованного сепаратрисами  $n$  седел с седловыми индексами равными 1.** Пусть векторное поле  $X_0$  имеет  $n$  различных седел  $z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0$ , таких, что  $\forall k = 1, 2, \dots, n \quad z_{k+1}^0 = \mathcal{R}_1 z_k^0$  (здесь и далее  $z_{n+1}^0 := z_1^0$ ). Собственные значения матрицы линейной части поля  $X_0$  во всех седлах  $z_k^0$  одинаковые. Обозначим их  $\lambda_1^0 > 0$  и  $\lambda_2^0 < 0$ . Пусть седловая величина  $\lambda_1^0 + \lambda_2^0 = 0$  и, соответственно, седловой индекс  $\lambda_0 := -\lambda_2^0 / \lambda_1^0 = 1$ . Предположим также, что поле  $X_0$  имеет траекторию  $L_1^0$ , являющуюся выходящей сепаратрисой седла  $z_1^0$  и входящей сепаратрисой седла  $z_2^0$ . Траектория  $L_m^0 := \mathcal{R}_m(L_1^0)$ ,  $m = 1, \dots, n-1$ , является выходящей сепаратрисой седла  $z_{m+1}^0$  и входящей сепаратрисой седла  $z_{m+2}^0$ . Сепаратрисный контур  $L^0 := \bigcup_{k=1}^n (\{z_k^0\} \cup L_k^0)$  – простая замкнутая кривая. Одна из двух компонент  $D_+$  множества  $\mathbb{R}^2 \setminus L^0$  не содержит сепаратрис седел  $z_k^0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , не входящие в контур  $L^0$ . Выберем  $C^\infty$ -вложение  $T : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ , трансверсальное траекториям поля  $X_0$ , так, чтобы  $T(0) \in L_1^0$ , а дуга  $T(0, 1) \subset D_+$ . При достаточно малом  $\bar{u} > 0$  определено отображение  $T(u) \mapsto \mathcal{R}_1 T(f_0(u))$ ,  $u \in (0, \bar{u})$ , соответствия по траекториям поля  $X_0$ . Поскольку седловой индекс равен 1, то согласно [11] определена сепаратрисная величина

$$s := f'_0(+0) = \exp \int_{-\infty}^{\infty} \left( (P_1)'_{x_1}(\xi(t), 0) + (P_2)'_{x_2}(\xi(t), 0) \right) dt ,$$

где  $x = \xi(t)$  – движение на траектории  $L_1^0$ .

Будем считать  $s < 1$ . Тогда все траектории поля  $X_0$ , начинающиеся в достаточно малой полукрестности контура  $L^0$ , содержащейся в  $D_+$ ,  $\omega$ -предельны к  $L^0$ . При  $n = 4$  иллюстрацией может служить рис. 1.

Векторные поля  $X_0$ , удовлетворяющие перечисленным выше условиям, образуют в  $\mathfrak{X}^r(D, n)$  погруженное  $C^{r-2}$ -подмногообразие  $\Sigma'$  коразмерности два.

Случай  $s > 1$  сводится к рассматриваемому случаю переходом к семейству векторных полей  $\{-X_\varepsilon\}$ .

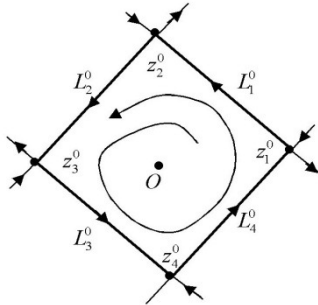


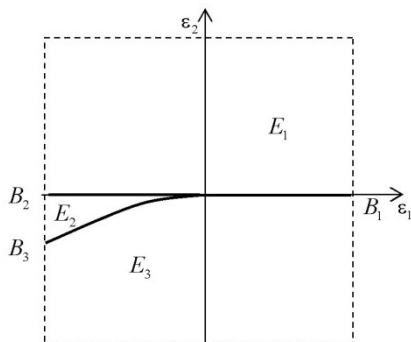
Рис. 1. Контур из 4-х седел и их сепаратрис

При значениях параметра  $\varepsilon$ , достаточно близких к нулю, векторное поле  $X_\varepsilon$  имеет седла  $z_k(\varepsilon)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $z_{k+1}(\varepsilon) = \mathcal{R}_1 z_k(\varepsilon)$ , с одинаковым седловым индексом  $\lambda(\varepsilon)$ , при этом  $z_k(\cdot) \in C^r$ ,  $z_k(0) = z_k^0$ ,  $\lambda(\cdot) \in C^{r-1}$ ,  $\lambda(0) = 1$ . Вследствие гладкой зависимости инвариантных многообразий седла от параметра [12] седло  $z_1(\varepsilon)$  ( $z_2(\varepsilon)$ ) имеет выходящую (входящую) сепаратрису  $L_{1,\alpha}(\varepsilon)$  ( $L_{2,\omega}(\varepsilon)$ ), пересекающую дугу  $T(-1, 1)$  в точке  $T(u_\alpha(\varepsilon))$  ( $T(u_\omega(\varepsilon))$ ), где  $u_\alpha(\cdot), u_\omega(\cdot) \in C^{r-1}$ ,  $u_\alpha(0) = u_\omega(0) = 0$ . Тогда  $L_{m,\alpha}(\varepsilon) = \mathcal{R}_{m-1} L_{1,\alpha}(\varepsilon)$  и  $L_{m+1,\omega}(\varepsilon) = \mathcal{R}_{m-1} L_{2,\omega}(\varepsilon)$  соответственно выходящая и входящая сепаратрисы седел  $z_m(\varepsilon)$  и  $z_{m+1}(\varepsilon)$ . Обозначим  $\Delta(\varepsilon) := u_\alpha(\varepsilon) - u_\omega(\varepsilon)$  и потребуем, чтобы определитель

$$\begin{vmatrix} \partial\lambda(0)/\partial\varepsilon_1 & \partial\lambda(0)/\partial\varepsilon_2 \\ \partial\Delta(0)/\partial\varepsilon_1 & \partial\Delta(0)/\partial\varepsilon_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда, сделав замену параметров  $\tilde{\varepsilon}_1 = \lambda(\varepsilon) - 1$ ,  $\tilde{\varepsilon}_2 = \Delta(\varepsilon)$  и вернувшись к их прежним обозначениям, можно считать, что найдется такое  $\delta_1 > 0$ , что при  $\varepsilon \in (-\delta_1, \delta_1)^2$

$$\lambda(\varepsilon) = 1 + \varepsilon_1, \quad \Delta(\varepsilon) = \varepsilon_2.$$



**Рис. 2. Бифуркационная диаграмма в случае контура с седловым индексом 1**

**Теорема 1.** Пусть поле  $X_0 \in \Sigma'$ . Тогда существуют окрестность  $U(L^0) = \mathcal{R}_1(U(L^0))$  контура  $L^0$ , число  $\delta \in (0, \delta_1)$  и разбиение области параметров  $(-\delta, \delta)^2$  на части  $B_0 = \{(0,0)\}$ ,  $B_i$ ,  $E_i$ ,  $i=1,2,3$ , где (рис. 2)  $B_1 = (0, \delta) \times \{0\}$ ,  $B_2 = (-\delta, 0) \times \{0\}$ ,  $B_3 = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = b(\varepsilon_1)\}$ ,  $b : (-\delta, 0) \rightarrow (-\delta, 0)$ ,  $b \in C^{r-1}$ ,  $b(-0) = b'(-0) = 0$ ,  $B_5 = \{0\} \times (-\delta, 0)$ ,  $E_i$  – связные компоненты  $(-\delta, \delta)^2 \setminus \bigcup_{k=0}^4 B_k$ , со следующими свойствами:

При всех  $\varepsilon, \tilde{\varepsilon} \in B_i$  и  $\varepsilon, \tilde{\varepsilon} \in E_i$  векторные поля  $X_\varepsilon$  и  $X_{\tilde{\varepsilon}}$  топологически эквивалентны в  $U(L^0)$ . При всех  $\varepsilon \in E_i$  векторное поле  $X_\varepsilon$  является грубым в  $U(L^0)$ .

Особыми точками поля  $X_\varepsilon$  в  $U(L^0)$  являются седла  $z_k(\varepsilon)$ ,  $k=1,2,\dots,n$ , и только они.

При  $\varepsilon \in E_1 \cup B_2 \cup B_3$  поле  $X_\varepsilon$  имеет в  $U(L^0)$  единственную замкнутую траекторию  $\Gamma(\varepsilon)$ ; она является устойчивым предельным циклом,

если  $\varepsilon \in E_1 \cup B_2$ , и двойным циклом, если  $\varepsilon \in B_3$ . При  $\varepsilon \in E_2$  поле  $X_\varepsilon$  имеет в  $U(L^0)$  две замкнутые траектории, устойчивый цикл  $\Gamma_1(\varepsilon)$  и неустойчивый цикл  $\Gamma_2(\varepsilon)$ . При остальных  $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$  у  $X_\varepsilon$  нет замкнутых траекторий, принадлежащих  $U(L^0)$ .

При  $\varepsilon \in B_1$  ( $\varepsilon \in B_2$ ) сепаратрисы  $L_{m,\alpha}(\varepsilon)$  и  $L_{m+1,\omega}(\varepsilon)$ ,  $m=1,2,\dots,n$ , совпадают, образуя вместе с седлами устойчивый (неустойчивый) контур.

При  $\varepsilon \in E_1$  сепаратриса  $L_{m,\alpha}(\varepsilon)$  содержится в  $U(L^0)$  и  $\omega$ -предельна к  $\Gamma(\varepsilon)$ , а при  $\varepsilon \in E_2 \cup B_3 \cup E_3$  выходит из  $U(L^0)$ .

При  $\varepsilon \in E_2$  ( $\varepsilon \in B_3$ ) сепаратриса  $L_{m,\omega}(\varepsilon)$  содержится в  $U(L^0)$  и  $\alpha$ -предельна к  $\Gamma_2(\varepsilon)$  ( $\Gamma(\varepsilon)$ ), а при  $\varepsilon \in E_1 \cup E_3$  выходит из  $U(L^0)$ .

Доказательство. Пусть  $D^* := D \setminus \{(0,0)\}$ ,  $\tilde{D} := (0,1) \times \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z}$ ,  $(\rho, \varphi)$  – полярные координаты в  $\mathbb{R}^2$ . Пусть  $p: D^+ \rightarrow \tilde{D}$  – отображение, ставящее в соответствие точке  $x$  с полярными координатами  $(\rho, \varphi)$  точку  $(\rho, n\varphi \bmod 2\pi)$ . Так как  $\forall x \in D^* p(\mathcal{R}_1 x) = p(x)$ , то в  $\tilde{D}$  определены векторные поля  $\tilde{X}_\varepsilon$ , заданные равенством  $\tilde{X}_\varepsilon(\tilde{x}) := X_\varepsilon(x)$  для  $\tilde{x} = p(x)$ . Векторное поле  $\tilde{X}_0$  имеет седло с нулевой седловой величиной и петлю сепаратрисы  $\tilde{L}^0 = p(L^0)$  этого седла с сепаратрисной величиной  $s$ . Из статьи [11] следует, что при некотором  $\delta > 0$  бифуркационная диаграмма семейства  $\tilde{X}_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$  в окрестности  $\tilde{U}(\tilde{L}^0)$  петли  $\tilde{L}^0$  имеет вид, описанный в теореме для случая  $n=1$ . Нетрудно убедиться, что в окрестности  $U(L^0) = p^{-1}\tilde{U}(\tilde{L}^0)$  контура  $L^0$ , структура векторных полей  $X_\varepsilon$  будет такая, как сформулировано в теореме.

**2. Бифуркации контура, образованного  $n$  седло-узлами,  $n$  седлами и их сепаратрисами.** Пусть поле  $X_0$  имеет  $2n$  различных особых точек  $z_1^0, z_2^0, \dots, z_{2n}^0$ , таких, что  $\forall k=1,2,\dots,2n$   $z_{k+2}^0 = \mathcal{R}_1 z_k^0$  (здесь и далее  $z_{2n+1}^0 := z_1^0, z_{2n+2}^0 := z_2^0$ ),  $z_k^0$  – грубое седло с седловым индексом  $\lambda^0 \neq 1$  при нечетных  $k$  и седло-узел с собственными значениями матрицы линейной части поля  $\lambda_1^0 = 0, \lambda_2^0 < 0$  при четных  $k$ . Будем также считать, что выходящая сепаратриса  $L_1^0$  седла  $z_1^0$  идет в седло-узел  $z_2^0$  и не совпадает ни с

одной из двух входящих сепаратрис седло-узла, а выходящая сепаратриса  $L_2^0$  седло-узла  $z_2^0$  является и входящей сепаратрисой седла  $z_3^0$ . Векторные поля  $X_0$ , удовлетворяющие таким условиям, образуют в  $\mathcal{X}^r(D, n)$  погруженное  $C^{r-2}$ -подмногообразие  $\Sigma''$  коразмерности два.

Обозначим  $L_m^0 := \mathcal{R}_m(L_1^0)$ ,  $m = 1, 2, \dots, 2n$ . Сепаратрисный контур  $L^0 := \bigcup_{m=1}^{2n} (\{z_m^0\} \cup L_m^0)$  – простая замкнутая кривая (рис. 3). Одна из двух компонент  $D_+$  множества  $\mathbb{R}^2 \setminus L^0$  не содержит сепаратрис седел  $z_{2k-1}^0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , не входящие в контур  $L^0$ .

Выберем в окрестности седло-узла  $z_2^0$  локальные координаты  $(y_1, y_2)$  так, чтобы точка  $z_2^0$  имела нулевые координаты, матрица линейной части поля  $X_0$  в этой точке была диагональная:  $\text{diag}(0, \lambda_2^0)$ , а точки с координатами  $(0, y_2)$ ,  $y_2 > 0$  принадлежали области  $D_+$ .

При значениях параметра  $\varepsilon$ , достаточно близких к нулю, векторное поле  $X_\varepsilon$  имеет локальное инвариантное многообразие  $W_\varepsilon$  [12, с. 293], задаваемое уравнением  $y_2 = w(y_1, \varepsilon)$ ,  $y_1 \in (-\delta, \delta)$ , где  $w \in C^{r-1}$ ,  $w(0, 0) = 0$ ,  $\partial w(0, 0) / \partial y_1 = 0$ , а ограничение поля  $X_\varepsilon$  на  $W_\varepsilon$  имеет вид  $F(y_1, \varepsilon) \partial / \partial y_1$ , где

$$F(0, 0) = \partial F(0, 0) / \partial y_1 = 0, \quad a := \partial^2 F(0, 0) / \partial y_1^2 \neq 0.$$

При  $\varepsilon$ , достаточно близких к нулю, уравнение  $\partial F(y_1, \varepsilon) / \partial y_1 = 0$  имеет относительно  $y_1$  единственное решение  $y_1 = m(\varepsilon)$ , где  $m(\cdot) \in C^{r-2}$ ,  $m(0) = 0$ . Положим  $h(\varepsilon) := F(m(\varepsilon), \varepsilon)$ .

Без ограничения общности можно считать, что координаты  $a > 0$ . Тогда при достаточно малом  $d \in (0, \delta)$  точки с координатами  $(y_1, y_2)$ ,  $y_1 \in (0, d]$ ,  $y_2 = w(y_1, 0)$  (соотв.  $y_2 > w(y_1, 0)$ ) принадлежат сепаратрисе  $L_2^0$  (соотв. области  $D_+$ ).

При  $\varepsilon$ , достаточно близких к нулю, векторное поле  $X_\varepsilon$  имеет седла  $z_{2k-1}(\varepsilon)$ ,  $z_{2k+1}(\varepsilon) = \mathcal{R}_1 z_{2k-1}(\varepsilon)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ; при этом  $z_k(\cdot) \in C^r$ ,  $z_k(0) = z_k^0$ , седло  $z_3(\varepsilon)$  имеет входящую сепаратрису, пересекающую дугу  $y_1 = d$ ,  $y_2 \in (-d, d)$  в точке с координатой  $y_2 = u_\omega(\varepsilon)$ , где  $u_\omega(\cdot) \in C^{r-1}$ ,  $u_\omega(0) = w(d, 0)$ .

Обозначим  $\Delta(\varepsilon) := w(d, \varepsilon) - u_\omega(\varepsilon)$  и потребуем, чтобы

$$\begin{vmatrix} \partial h(0)/\partial \varepsilon_1 & \partial h(0)/\partial \varepsilon_2 \\ \partial \Delta(0)/\partial \varepsilon_1 & \partial \Delta(0)/\partial \varepsilon_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Это условие равносильно трансверсальности семейства  $X_\varepsilon$  в точке  $\varepsilon = 0$  подмногообразию  $\Sigma''$ .

Сделав замену параметров  $\tilde{\varepsilon}_1 = h(\varepsilon)$ ,  $\tilde{\varepsilon}_2 = \Delta(\varepsilon)$  и вернувшись к их прежним обозначениям, можно считать, что найдется такое  $\delta_1 > 0$ , что

$$\forall \varepsilon \in (-\delta_1, \delta_1)^2 \quad h(\varepsilon) = \varepsilon_1, \quad \Delta(\varepsilon) = \varepsilon_2.$$

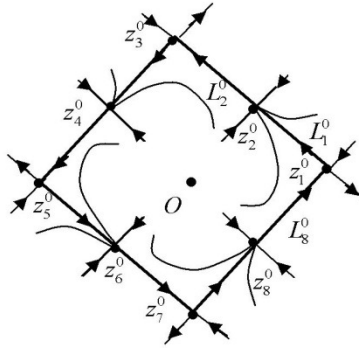


Рис. 3. Контур из 4-х седло-узлов, 4-х седел и их сепаратрис

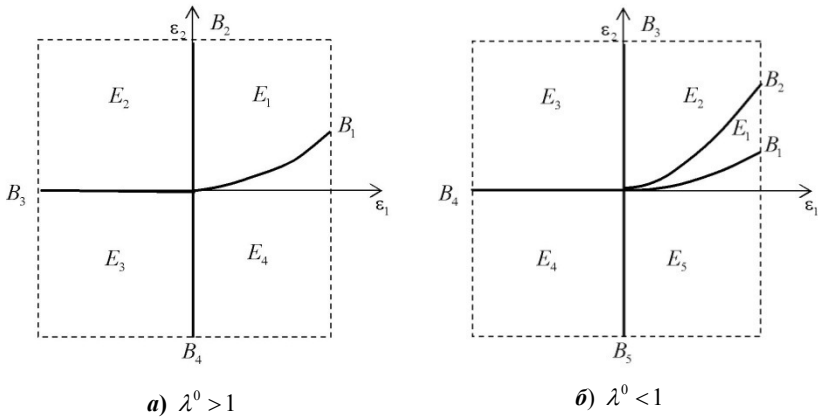


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма в случае сепаратрисного контура с седло-узлами и седлами



**Теорема 2.** Пусть поле  $X_0 \in \Sigma^n$  и седловой индекс  $\lambda^0 > 1$ . Тогда существуют окрестность  $U(L^0) = \mathcal{R}_1(U(L^0))$  контура  $L^0$ , число  $\delta \in (0, \delta_1)$  и разбиение области параметров  $(-\delta, \delta)^2$  на части  $B_0 = \{(0, 0)\}$ ,  $B_i, E_i, i = 1, 2, 3, 4$ , где (рис. 4, а)  $B_1 = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = b(\varepsilon_1)\}$ ,  $b : (0, \delta) \rightarrow (-\delta, \delta)$ ,  $b \in C^{r-1}$ ,  $b(+0) = b'(+0) = 0$ ,  $B_2 = \{0\} \times (0, \delta)$ ,  $B_3 = (-\delta, 0) \times \{0\}$ ,  $B_4 = \{0\} \times (-\delta, 0)$ , а  $E_i$  – связанные компоненты  $(-\delta, \delta)^2 \setminus \bigcup_{k=0}^4 B_k$ , со следующими свойствами:

При всех  $\varepsilon, \tilde{\varepsilon} \in B_i$  и  $\varepsilon, \tilde{\varepsilon} \in E_i$  векторные поля  $X_\varepsilon$  и  $X_{\tilde{\varepsilon}}$  топологически эквивалентны в  $U(L^0)$ . При всех  $\varepsilon \in E_i$  векторное поле  $X_\varepsilon$  является грубым в  $U(L^0)$ .

Векторное поле  $X_\varepsilon$  имеет в  $U(L^0)$  следующие особые точки: при всех  $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$  седла  $z_{2k-1}(\varepsilon)$ ,  $z_{2k-1+n}(\varepsilon) = z_{2k-1}(\varepsilon)$ ,  $z_{2k-1}(\cdot) \in C^r$ ,  $z_{2k-1}(0) = z_{2k-1}^0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , при  $\varepsilon \in \{0\} \times (-\delta, \delta)$  седло-узлы  $z_{2k}(\varepsilon)$ ,  $z_{2k+n}(\varepsilon) = z_{2k}(\varepsilon)$ ,  $z_{2k}(\cdot) \in C^{r-1}$ ,  $z_{2k}(0) = z_{2k}^0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , при  $\varepsilon \in (-\delta, 0) \times (-\delta, \delta)$  седла  $z'_{2k}(\varepsilon)$  и узлы  $z''_{2k}(\varepsilon)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Векторное поле  $X_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in E_1$ , имеет в  $U(L^0)$  единственную замкнутую траекторию – устойчивый предельный цикл  $\Gamma(\varepsilon)$ . При всех остальных  $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$  замкнутых траекторий у  $X_\varepsilon$  в  $U(L^0)$  нет.

У седла  $z_{2k-1}(\varepsilon)$  одна выходящая сепаратриса  $\omega$ -предельна к циклу  $\Gamma(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \in E_1$ , к седлу  $z_{2k+1}(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \in B_1$ , к седло-узлу  $z_{2k}(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \in \{0\} \times (-\delta, \delta)$ , к узлу  $z''_{2k}(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \in (-\delta, 0) \times (-\delta, \delta)$  и покидает  $U(L^0)$  при  $\varepsilon \in E_4$ , а другая выходящая сепаратриса покидает  $U(L^0)$ . У седло-узла  $z_{2k}(\varepsilon)$  выходящая сепаратриса при  $\varepsilon \in B_2$   $\omega$ -предельна к седло-узлу  $z_{2k+2}(\varepsilon)$ , при  $\varepsilon \in B_4$  покидает  $U(L^0)$ , у седла  $z'_{2k}(\varepsilon)$  одна выходящая сепаратриса  $\omega$ -предельна к узлу  $z''_{2k}(\varepsilon)$ , а другая  $\omega$ -предельна к седлу  $z_{2k+1}(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \in B_3$  и покидает  $U(L^0)$  при  $\varepsilon \in E_2 \cup E_3$ .

**Теорема 3.** Пусть поле  $X_0 \in \Sigma^n$  и седловой индекс  $\lambda^0 < 1$ . Тогда существуют окрестность  $U(L^0) = \mathcal{R}_1(U(L^0))$  контура  $L^0$ , число  $\delta \in (0, \delta_1)$  и разбиение области параметров  $(-\delta, \delta)^2$  на части  $B_0 = \{(0, 0)\}$ ,  $B_i, E_i, i = 1, 2, \dots, 5$ , где (рис. 4, б)  $B_j = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = b_j(\varepsilon_1)\}$ ,

$b_j : (0, \delta) \rightarrow (-\delta, \delta)$ ,  $b_j \in C^1$ ,  $b_j(+0) = b'_j(+0) = 0$ ,  $j = 1, 2$ ,  $\forall \varepsilon_1 \in (0, \delta)$   
 $b_1(\varepsilon_1) < b_2(\varepsilon_1)$ ,  $B_3 = \{0\} \times (0, \delta)$ ,  $B_4 = (-\delta, 0) \times \{0\}$ ,  $B_5 = \{0\} \times (-\delta, 0)$ , а  $E_i$  –  
 связанные компоненты  $(-\delta, \delta)^2 \setminus \bigcup_{k=0}^5 B_k$ , со следующими свойствами:

При всех  $\varepsilon, \tilde{\varepsilon} \in B_i$  и  $\varepsilon, \tilde{\varepsilon} \in E_i$  векторные поля  $X_\varepsilon$  и  $X_{\tilde{\varepsilon}}$  топологически эквивалентны в  $U(L^0)$ . При всех  $\varepsilon \in E_i$  векторное поле  $X_\varepsilon$  является грубым в  $U(L^0)$ .

Векторное поле  $X_\varepsilon$  имеет в  $U(L^0)$  следующие особые точки: при всех  $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$  седла  $z_{2k-1}(\varepsilon)$ ,  $z_{2k-1+n}(\varepsilon) = z_{2k-1}(\varepsilon)$ ,  $z_{2k-1}(\cdot) \in C^r$ ,  $z_{2k-1}(0) = z_{2k-1}^0$ ,  $z_{2k-1+n} = z_{2k-1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , при  $\varepsilon \in \{0\} \times (-\delta, \delta)$  седло-узлы  $z_{2k}(\varepsilon)$ ,  $z_{2k+n}(\varepsilon) = z_{2k}(\varepsilon)$ ,  $z_{2k}(\cdot) \in C^{r-1}$ ,  $z_{2k}(0) = z_{2k}^0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , при  $\varepsilon \in (-\delta, 0) \times (-\delta, \delta)$  седла  $z'_{2k}(\varepsilon)$  и узлы  $z''_{2k}(\varepsilon)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Векторное поле  $X_\varepsilon$  имеет в  $U(L^0)$  при  $\varepsilon \in E_1$  две замкнутые траектории – устойчивый и неустойчивый циклы  $\Gamma_1(\varepsilon)$  и  $\Gamma_2(\varepsilon)$ , при  $\varepsilon \in E_2$  ( $\varepsilon \in B_1$ ) единственную замкнутую траекторию – устойчивый цикл  $\Gamma_1(\varepsilon)$  (двойной цикл  $\Gamma(\varepsilon)$ ). При всех остальных  $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$  замкнутых траекторий у  $X_\varepsilon$  в  $U(L^0)$  нет.

Одна выходящая сепаратриса седла  $z_{2k-1}(\varepsilon)$   $\omega$ -предельна к циклу  $\Gamma_1(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \in E_2$ , к седлу  $z_{2k+1}(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \in B_2$ , к седло-узлу  $z_{2k}(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \in \{0\} \times (-\delta, \delta)$ , к узлу  $z''_{2k}(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \in (-\delta, 0) \times (-\delta, \delta)$  и покидает  $U(L^0)$  при остальных  $\varepsilon$ , а другая выходящая сепаратриса покидает  $U(L^0)$ . Одна входящая сепаратриса седла  $z_{2k+1}(\varepsilon)$   $\alpha$ -предельна к циклу  $\Gamma_2(\varepsilon)$  ( $\Gamma(\varepsilon)$ ) при  $\varepsilon \in E_2$  ( $\varepsilon \in B_1$ ), к седлу  $z_{2k-1}(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \in B_2$ , к седлу  $z'_{2k}(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \in B_3$  и покидает  $U(L^0)$  при остальных  $\varepsilon \neq 0$ , а другая входящая сепаратриса покидает  $U(L^0)$ . У седло-узла  $z_{2k}(\varepsilon)$  выходящая сепаратриса  $\omega$ -предельна к седло-узлу  $z_{2k+2}(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \in B_3$ , покидает  $U(L^0)$  при  $\varepsilon \in B_5$ , у седла  $z'_{2k}(\varepsilon)$  одна выходящая сепаратриса  $\omega$ -предельна к узлу  $z''_{2k}(\varepsilon)$ , а другая  $\omega$ -предельна к седлу  $z_{2k+1}(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \in B_4$  и покидает  $U(L^0)$  при  $\varepsilon \in E_3 \cup E_4$ .

Доказательство теорем 2 и 3, аналогично доказательству теоремы 1, сводится к случаю  $n=1$ , исследованному, например, в [13] (см. также [14]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
2. *Жолондек Х.* О версальности одного семейства симметричных векторных полей на плоскости // Матем. сб. 1983. Т. 120, № 4. С. 473–499.
3. *Golubitsky M.* Singularities and Groups in Bifurcation Theory // M.Golubitsky, D. Shaeffer, I. Stewart. Springer-Verlag, 1988.
4. *Шноль Э.Э.* Правильные многогранники и бифуркации симметричных положений равновесия обыкновенных дифференциальных уравнений // Матем. сб. 2000. Т. 191, № 8. С. 141–157.
5. *Лерман Л.М.* О бифуркациях потери симметрии в обратимых системах // Л.М. Лерман, Д.В. Тураев. Нелинейная динамика. 2012. Т. 8, № 2. С. 323–343.
6. *Ройтенберг В.Ш.* Векторные поля на плоскости с центральной симметрией: грубость и первая степень негрубости // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия: Естественно-математические и технические науки. 2021, № 2 (281). С. 27–40. DOI: 10.53598/2410-3225-2021-2-281-27-40.
7. *Ройтенберг В.Ш.* Бифуркации полицикла, образованного двумя петлями сепаратрис негрубого седла динамической системы с центральной симметрией // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика, Механика, Физика» 2021. Т. 13, № 2. С. 39–46. DOI: 10.14529/mmph210305.
8. *Roitenberg V. Sh.* Bifurcations of a polycycle formed by separatrices of saddles of a dynamical system with central symmetry // Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы: сб. материалов междунар. конф. (Белгород, 25–29 октября 2021 г.) / под ред. В.Б. Васильева, И.С. Ломова. Белгород: ИД «БелГУ» НИУ «БелГУ», 2021. С. 311–312.
9. *Ройтенберг В.Ш.* Бифуркации аттрактора из двух седел и их сепаратрис динамической системы с центральной симметрией // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 17. Ярославль: Изд-во ЯГТУ. 2022. С. 27–34.
10. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркации сепаратрисных контуров динамических систем с центральной симметрией // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование: межвуз. сб. науч. тр. / отв. ред. С. С. Мамонов. Вып. 4. Рязань: Ряз. гос. ун-т им. С.А. Есенина. 2022. С. 94–98.
11. *Ноздрачева В.П.* Бифуркации негрубой петли сепаратрисы // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18, № 9. С. 1551–1558.
12. *Шильников Л.П.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 1 / Л.П. Шильников, А.Л. Шильников, Д.В. Тураев, Л. Чуа. Москва–Ижевск: ИКИ, 2004. 416 с.
13. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях контура из сепаратрис седла и седло-узла // Яросл. политехн. ин-т. Ярославль. 1988. 39 с. Деп. в ВИНТИ, № 2555-B88.
14. *Грозовский Т.М.* Бифуркации полициклов “яблоко” и “половина яблока” в типичных двухпараметрических семействах // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32, № 4. С. 458–469.

УДК 519.86:330.44:65.012.122

**Д. В. Юдин, В. В. Абрамов**

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина  
Россия, г. Рязань, e-mail: d.yudin2008@stud.rsu.edu.ru,  
v.abramov@365.rsu.edu.ru

## **ОБ УСЛОВИЯХ НАРАЩЕНИЯ ВЫРУЧКИ В РАМКАХ ОДНОЙ БАЛАНСОВОЙ МОДЕЛИ**

*Исследована разностная балансовая модель производства при стационарном производственном укладе. Получены условия достижения планового значения потока выручки.*

**Ключевые слова:** линейная разностная система, балансовая модель, устойчивость, выручка, плановое состояние, производственный поток

**D. V. Yudin, V. V. Abramov**

S.A. Yesenin Ryazan State University  
Russia, Ryazan, e-mail: d.yudin2008@stud.rsu.edu.ru,  
v.abramov@365.rsu.edu.ru

## **ON THE CONDITIONS FOR INCREASING REVENUE WITHIN THE FRAMEWORK OF A SINGLE BALANCE SHEET MODEL**

*The difference model of the balance type for production in a stationary production mode is investigated. The conditions for achieving the planned value of the revenue stream are obtained.*

**Keywords:** linear difference system, balance model, sustainability, revenue, planned state, production flow

Допустим,  $x(n)$  – вектор неизвестных объемов производства (эндогенные переменные) в будущем торгово-производственном периоде  $n$  работы предприятия; известны следующие прогнозы (экзогенные переменные):  $y(n)$  – вектор объемов непроеизводственного потребления, ассоциированных с каждым из производимых товаров;  $c(n)$ ,  $b(n)$  – соответственно векторы цен и себестоимостей товаров;  $a(n)$  – вектор долей суммарной выручки за период  $n$ , вложенных в производство каждого товара в следующем периоде  $n + 1$  и выделенных на потребление по итогам перио-

да  $n$ . Каждый вектор состоит из  $m$  компонент (по количеству производимых товаров). Предполагается, что все произведенные товары гарантированно реализуются. При этом производственный поток  $x(n)$  удовлетворяет линейной неоднородной разностной системе [1]

$$x(n+1) = A(n)x(n) + f(n), \quad (1)$$

где матрица  $A(n) = \begin{pmatrix} a_i(n)c_j(n) & \\ & b_i(n) \end{pmatrix}$  и вектор-столбец  $f(n) = -\begin{pmatrix} y_i(n) \\ b_i(n) \end{pmatrix}$ ,

$i, j = \overline{1, m}$  (здесь указаны компоненты матрицы и вектора).

Допустим, производственный уклад и потребление являются стационарными. Тогда потоки экзогенных переменных состоят из постоянных векторов:  $y(n) \equiv y$ ,  $c(n) \equiv c$ ,  $b(n) \equiv b$ ,  $a(n) \equiv a$ . При этом

$A(n) \equiv A = \begin{pmatrix} a_i c_j & \\ & b_i \end{pmatrix}$ ,  $f(n) \equiv f = -\begin{pmatrix} y_i \\ b_i \end{pmatrix}$  и модель (1) имеет вид

$$x(n+1) = A \cdot x(n) + f. \quad (2)$$

**Задача.** Найти условия, при которых модель (2) определяет поток, удовлетворяющий системе неравенств

$$\begin{cases} c^T x(n) \geq \bar{d} \cdot c^T x(0), \\ n \geq N. \end{cases} \quad (3)$$

Величина  $\bar{d}$  – минимальный коэффициент наращивания начальной выручки  $c^T x(0)$  к заданному торгово-производственному периоду  $N$ . (Аналогичную задачу можно поставить для наращивания прибыли).

Подставляя пошагово в систему (2) значения  $x(k)$ ,  $k = \overline{0, n}$ , получим зависимость решения от начального значения

$$x(n) = A^n \cdot x(0) + \left( \sum_{k=1}^{n-1} A^k + E \right) f. \quad (4)$$

**Лемма 1.**  $A^n = (trA)^{n-1} A$ .

**Доказательство.** При  $n=1$  очевидно  $(trA)^{1-1} A = A$ . Допустим,  $A^k = (trA)^{k-1} A$ . Тогда  $A^{k+1} = A^k \cdot A = (trA)^{k-1} \cdot A^2$ . Для  $A = \begin{pmatrix} a_i \cdot c_j \\ b_i \end{pmatrix}$  имеем

$$A^2 = \left( \frac{a_i \cdot c_j}{b_i} \right) \left( \frac{a_i \cdot c_j}{b_i} \right) = \left( \frac{a_i \cdot c_j}{b_i} \right) \cdot \sum_{k=1}^m \frac{a_k \cdot c_k}{b_k} = A \cdot trA.$$

Значит, справедливо равенство  $A^{k+1} = (trA)^{k-1} \cdot trA \cdot A = (trA)^k A$ .

Итак, по индукции лемма 1 доказана.

В силу леммы 1 равенство (4) имеет вид

$$x(n) = (trA)^{n-1} Ax(0) + \left( \sum_{k=1}^{n-1} (trA)^{k-1} \right) A + E \Big) f. \quad (5)$$

С экономической точки зрения решение  $x(n)$  системы (2), как поток объемов производства товаров с начальным состоянием  $x(0)$ , должно иметь неотрицательные компоненты. Для этого достаточно, чтобы решение было возрастающим, то есть при всех  $n$  по компонентам выполнялось векторное неравенство  $x(n+1) \geq x(n)$ . Отсюда с помощью формулы (5) получим

$$x(n+1) - x(n) = (trA)^{n-1} A \cdot \left( (trA - 1) \cdot x(0) + f \right) \geq 0_m. \quad (6)$$

По свойству модели (2) имеют место оценки  $f \leq 0_m$ ,  $x(0) \geq 0_m$ . Поэтому при  $trA \leq 1$  условие не выполняется. Тогда поток  $x(n)$  будет убывающим и окажется неотрицательным не более чем на конечном числе периодов. Заметим, что неравенство  $trA \leq 1$  означает, что причина «сокращения экономики» состоит в том, что существуют «убыточные» товары, для которых  $c_i/b_i < 1$ , или полученная выручка не полностью распределяется внутри предприятия, то есть  $\sum_{i=1}^m a_i < 1$ . Если же все товары приносят положительную прибыль и выручка распределяется внутри предприятия полностью, то есть выполняются условия

$$c_i/b_i > 1, \quad i = \overline{1, m}, \quad \sum_{i=1}^m a_i = 1, \quad (7)$$

то  $trA > 1$  (заметим, что в этом случае система (2) неустойчива [2]). Тогда при выборе начального вектора объемов производства согласно условию

$$x(0) \geq -\frac{1}{trA - 1} f \quad (8)$$

выполняется оценка (6). Итак, справедливо следующее утверждение.

**Лемма 2.** Если выполняются условия (7) и (8), то поток  $x(n)$  является возрастающим.

Из леммы 2 следует, что поток выручки  $c^T x(n)$  является возрастающим, при этом условия (3) выполняются, если верно неравенство  $c^T x(N) \geq \bar{d} \cdot c^T x(0)$  или, что то же самое с учетом формулы (5),

$$c^T \left( \left( (trA)^{N-1} A - \bar{d}E \right) x(0) + \left( \sum_{k=1}^{N-1} (trA)^{k-1} \right) (A + E) f \right) \geq 0. \quad (9)$$

Таким образом, установлено следующее утверждение, позволяющее согласовать параметры модели (2) для достижения планового состояния предприятия.

**Теорема 1.** Если выполняются условия (7)–(9), то для модели (2) выполняются условия (3).

Условия монотонности потока можно получить иным путем.

Выясним, существует ли в модели (2) стационарный поток  $x(n) = u$ . Если он существует, то  $u \geq 0_m$  – решение линейной алгебраической системы уравнений  $W \cdot u = f$ , в которой  $W = E - A$ .

По индукции устанавливаются следующие два утверждения.

**Лемма 3.**  $\det(W) = 1 - trA$ .

**Лемма 4.** Если  $trA \neq 1$ , то существует

$$W^{-1} = \frac{1}{trA - 1} \begin{pmatrix} tr(A) - \left( \frac{a_1 \cdot c_1}{b_1} + 1 \right) & \dots & -\frac{a_1 \cdot c_m}{b_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_m \cdot c_1}{b_m} & \dots & tr(A) - \left( \frac{a_m \cdot c_m}{b_m} + 1 \right) \end{pmatrix} = \quad (10)$$

$$= \frac{1}{trA - 1} (trA \cdot E - A - E) = E - \frac{1}{trA - 1} A.$$

Из лемм 3, 4, учитывая, что  $f \leq 0_m$ , получаем следующее утверждение.

**Лемма 5.** Если  $1 < trA < 1 + \frac{a_i \cdot c_i}{b_i}$ ,  $i = \overline{1, m}$ , то матрица  $W^{-1}$  содержит только неположительные элементы и система (2) имеет единственное стационарное решение  $u = W^{-1} f \geq 0_m$ .

Из леммы 5 следует, что стационарный производственный поток неустойчив [2], то есть с практической точки зрения стационарный режим работы предприятия не реализуется.

Заметим, что при  $trA \neq 1$  система (2) также имеет стационарное решение  $u = W^{-1} f$ . Однако при нарушении условия леммы 5 это решение с

экономической точки зрения нельзя интерпретировать в рамках модели (2) как стационарный поток объемов производства, то есть такое решение является лишь формальным.

Допустим,  $x(0) = W^{-1}f$  в равенстве (6). Тогда в силу равенства (10), используя лемму 1, получим, что

$$\begin{aligned} x(n+1) - x(n) &= (trA)^{n-1} A \cdot \left( (trA - 1) \cdot \left( E - \frac{1}{trA - 1} A \right) f + f \right) = \\ &= (trA)^{n-1} A \cdot (trA \cdot E - E + E - A) f = (trA)^{n-1} (trA \cdot A - A^2) f = 0_m. \end{aligned}$$

Таким образом, доказана

**Лемма 6.** Если  $trA \neq 1$  и справедлива оценка

$$x(0) \geq \left( E - \frac{1}{trA - 1} A \right) f, \quad (11)$$

то поток  $x(n)$  является возрастающим.

Лемма 6 с экономической точки зрения означает, что при выборе начальных объемов производства не менее стационарных в рамках модели (2) получается возрастающий поток объемов производства, иначе поток убывает и имеет экономический смысл лишь на конечном числе торгово-производственных периодов (производство постепенно исчезает). В этом смысле, если существует неотрицательный стационарный поток, то он является «сепаратором» монотонных производственных потоков.

Таким образом, установлено еще одно утверждение, позволяющее согласовать параметры модели (2) для достижения планового состояния предприятия:

**Теорема 2.** Если  $trA \neq 1$  и выполняются условия (11) и (9), то для модели (2) выполняются условия (3).

**Пример.** Предположим, что в рамках модели (2) известны прогнозы стационарных потоков условных единиц: цен  $c = \begin{pmatrix} 70 \\ 53 \end{pmatrix}$ , себестоимостей  $b = \begin{pmatrix} 64 \\ 40 \end{pmatrix}$ , долей выручки  $a = \begin{pmatrix} 34/100 \\ 66/100 \end{pmatrix}$  за торгово-производственный период, вложенных в производство каждого товара в следующем периоде и выделенных на потребление  $y = \begin{pmatrix} 25 \\ 29 \end{pmatrix}$  по итогам текущего периода. Исследование модели по теореме 2, реализованное в пакете Maple, представлено на рис. 1.



```

Ввод данных
[ Прогнозируемые стационарные потоки: цен с, себестоимостей b, долей выручки a, потребления y
> c:=matrix([[70],[53]]); b:=matrix([[64],[45]]); a:=matrix([[34/100],[66/100]]); y:=matrix([[25],[29]]);

Определение коэффициентов модели
Определим матрицу A и вектор-столбец f
[ > B:=diag(b[1,1],b[2,1]);
  A:=multiply(multiply(inverse(B),a),transpose(c)); f:=evalm(multiply(inverse(B),y)*(-1));
Определим модель x(n+1)=Ax(n)+f для производственного потока x(n)
> eq1:=-x[1](n+1)-A[1,1]*x[1](n)+A[1,2]*x[2](n)+f[1,1]; eq2:=-x[2](n+1)-A[2,1]*x[1](n)+A[2,2]*x[2](n)+f[2,1];

      eq1:=x1(n+1)=119/320*x1(n)+901/3200*x2(n)-25/64
      eq2:=x2(n+1)=77/75*x1(n)+583/750*x2(n)-29/45

Вычисление производственного потока
[ Производственный поток и потоки объемов для каждого товара
> u:=rsolve(eq1,eq2),(x[1],x[2]):- x[1](n):=-subs(u[1],x[1](n)); x[2](n):=-subs(u[2],x[2](n));

      x1(n)=-188187875/27581*n+19327/10743+13515/55162*(27581/24000)*x2(0)+8925/27581*(27581/24000)*x1(0)
      x2(n)=-1558638400/27581*n+19340/3581+18656/27581*(27581/24000)*x2(0)+24640/27581*(27581/24000)*x1(0)

Вычисление стационарного потока
[ Стационарный поток u=(E-A)^(-1)f
> E:=matrix([[1,0],[0,1]]); U:=evalf(linsolve(evalm(E-A),f));

      U=[1.799031928
        5.400726054]

Задача о наращении выручки
{ c^T(n).x(n) >= d.c^T(0).x(0),
  n >= N.
[ Введем данные: величину d наращения выручки, плановое время N наращения выручки, вектор начальных объемов производства
> d:=1.2; N:=11; x_0:=matrix([[10],[15]]);
[ Проверим условие наращения выручки за плановое время
> reshenie:=solve((c[1,1]*x[1](n)+c[2,1]*x[2](n))>=d*(c[1,1]*x_0[1,1]+c[2,1]*x_0[2,1]),n>=N),n);
      reshenie=[11..11]

[ Графическая иллюстрация факта наращения выручки
> implicitplot({x:=d*(c[1,1]*x_0[1,1]+c[2,1]*x_0[2,1]),x=c[1,1]*x[1](n)+c[2,1]*x[2](n),n=N},
  n=0..N+1,x=0..d*(c[1,1]*x_0[1,1]+c[2,1]*x_0[2,1])+300,title='Выручка производства');
  
```

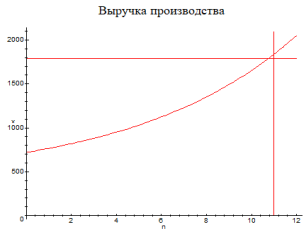


Рис. 1. Пример решения задачи о наращении выручки для модели (2)

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юдин Д.В. Моделирование дискретной динамики производства / Д.В. Юдин, В.В. Абрамов // XXIV Всерос. студенческая науч.-практ. конф. Нижневартовского гос. ун-та (5–6 апреля 2022 г). Ч. 4. Нижневартовск: Изд-во НВГУ, 2022. С. 615–620.
2. Юдин Д.В. Исследование устойчивости одной модели производства / Д.В. Юдин, В.В. Абрамов // 72-я Междунар. студенческая науч.-техн. конф. (Астрахань, 18–23 апреля 2022 г.): материалы. Астрахань: Изд-во АГТУ, 2022. С. 489–490.

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

УДК 517

**М. А. Башкин, М. Н. Третьякова**

Рыбинский государственный авиационный технический университет  
им. П.А. Соловьева

Россия, г. Рыбинск, e-mail: mbashkin@rsatu.ru

Средняя общеобразовательная школа № 20 им. П.И. Батова

Россия, г. Рыбинск, e-mail: masha.tretya@gmail.com

## ОДНА ОЛИМПИАДНАЯ ЗАДАЧА

*В работе рассматриваются различные методы решения одной олимпиадной задачи. Предлагается авторское ее решение векторным методом. Указывается на важность этого метода в решении геометрических задач.*

**Ключевые слова:** векторный метод, геометрическая задача, математическая олимпиада

**M. A. Bashkin, M. N. Tretyakova**

P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University

Russia, Rybinsk, e-mail: mbashkin@rsatu.ru

P.I. Batov Municipal Educational Institution Secondary School № 20

Russia, Rybinsk, e-mail: masha.tretya@gmail.com

## ONE OLYMPIAD TASK

*In the paper we discuss a various methods of solving one Olympiad task. We proposed the solution of it by a vector method. It is pointed out the importance of this method in solving geometric problems.*

**Keywords:** vector method, geometric problem, mathematical Olympiad

26 декабря 2022 года в Рыбинском государственном авиационном техническом университете им. П.А.Соловьева состоялась Всероссийская студенческая олимпиада по математике для студентов и курсантов первого курса всех направлений и специальностей подготовки. Среди 11 предложенных задач была геометрическая задача под номером 4. Как видно из приведенной ниже диаграммы, эта задача принесла участникам олимпиады наибольшее количество баллов (рис. 1, по вертикальной оси отложено

общее количество баллов, набранных всеми участниками, по горизонтальной оси номера задач).

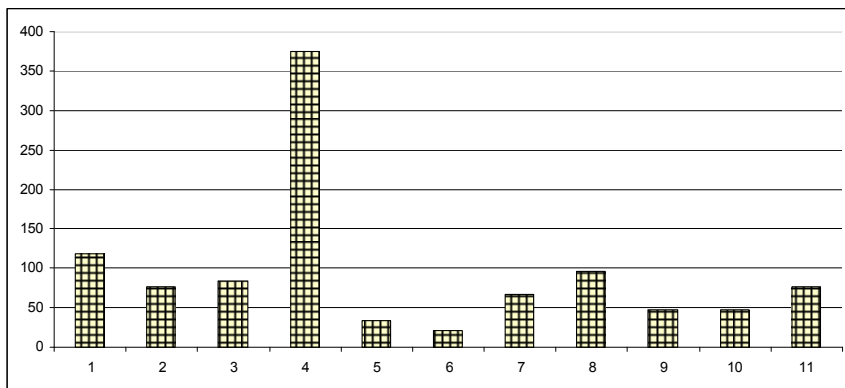


Рис. 1

Приведем формулировку условия задачи:

Пусть  $ABC$  – прямоугольный равнобедренный треугольник,  $AB$  – гипотенуза этого треугольника,  $A(-1; 2)$ ,  $B(5; 4)$ . Найдите вершину  $C$  треугольника  $ABC$ , если она и начало координат точка  $O$  лежат по разные стороны от прямой  $AB$ .

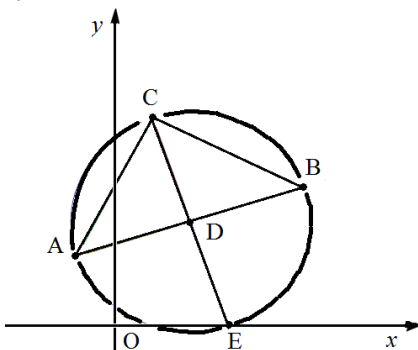


Рис. 2

1. Рассмотрим сначала «стандартные» решения, близкие к предложенному А.И. Бурцевым при проверке: находим вектор  $\vec{AB} = (6; 2)$ , центр  $D(2; 3)$  описанной окружности и её радиус  $R = \sqrt{10}$  (рис. 2), далее записы-

ваем уравнение окружности  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$  и общее уравнение прямой  $CD$   $6(x-2) + 2(y-3) = 0$  по точке  $D$  и нормальному вектору  $\overrightarrow{AB}$ . Решив систему из этих двух уравнений, находим две точки  $C(1; 6)$  и  $E(3; 0)$ .

Отложим пока выбор точки, лежащей с противоположной стороны от прямой  $AB$  относительно точки  $O$ , и рассмотрим другие способы получения этих двух точек  $C$  и  $E$ , предложенные участниками олимпиады:

- 1) через уравнение  $CD$  и формулу расстояния от точки  $D$ ;
- 2) через систему уравнения окружности с центром в точке  $A$  и радиусом  $AC = R\sqrt{2}$  и уравнения прямой  $CD$  или уравнения окружности радиуса  $R$  с центром в точке  $D$ ;
- 3) через систему уравнений окружностей с центрами в точках  $A$  и  $B$  и радиусом  $AC = R\sqrt{2}$ .

Во всех этих случаях приходим к той же системе, что и в решении А.И. Бурцева. Причем сложность перехода в каждом следующем случае возрастает.

Теперь рассмотрим задачу выбора точки. Её можно решить двумя способами:

- 1) графическим методом. Для этого нужно построить график прямой  $AB$  и, отметив точки  $C$  и  $E$ , выбрать нужную. Этот метод нельзя назвать точным. Однако, записав для прямой  $AB$  сначала каноническое уравнение  $\frac{x+1}{6} = \frac{y-2}{2}$ , а потом уравнение в отрезках  $-\frac{x}{7} + \frac{y}{(7/3)} = 1$ , видим,

что при неотрицательных значениях  $x$  прямая расположена выше оси  $Ox$ . Поэтому начало координат и точка  $E(3; 0)$  лежат от нее по одну сторону;

- 2) используя нормальное (нормированное) уравнение прямой  $AB$  и вычисляя отклонения точек  $C$  и  $E$  от  $AB$ . Однако, если решать задачу, используя нормальное уравнение прямой  $AB$ , то есть более простое решение, позволяющее строить вершину треугольника однозначно.

2. Решение через нормальное уравнение прямой. Найдем сначала, как было указано выше, уравнение  $AB$ :  $\frac{x+1}{6} = \frac{y-2}{2}$  и уравнение  $CD$ :

$$6(x-2) + 2(y-3) = 0. \text{ Тогда нормальный вид } AB: -\frac{x}{\sqrt{10}} + \frac{3y}{\sqrt{10}} - \frac{7}{\sqrt{10}} = 0.$$

Из уравнения видно, что расстояние от начала координат до  $AB$  равно  $\frac{7}{\sqrt{10}}$ . Значит, уравнение прямой, проходящей через точку  $C$ , параллельно

$AB$  на расстоянии  $R = \sqrt{10}$ , имеет вид  $-\frac{x}{\sqrt{10}} + \frac{3y}{\sqrt{10}} - \left(\frac{7}{\sqrt{10}} + \sqrt{10}\right) = 0$ . Ос-

талось найти координаты точки  $C$ , решив систему

$$\begin{cases} -\frac{x}{\sqrt{10}} + \frac{3y}{\sqrt{10}} - \left(\frac{7}{\sqrt{10}} + \sqrt{10}\right) = 0, \\ 6(x-2) + 2(y-3) = 0. \end{cases}$$

3. В завершении предложим решение векторным методом. Из условия имеем  $\vec{OA} = (-1; 2)$ ,  $\vec{OB} = (5; 4)$ ,  $\vec{OD} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) = (2; 3)$ . Тогда

$\vec{DA} = \vec{OA} - \vec{OD} = (-3; -1)$ ,  $|\vec{DA}| = \sqrt{10}$ . Найдем  $\vec{DC} = (x; y)$  такой, что  $\vec{DC} \perp \vec{DA}$  и  $|\vec{DC}| = |\vec{DA}| = \sqrt{10}$ :  $(\vec{DC}, \vec{DA}) = -3x - y = 0$  и  $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{10}$ .

Решив систему из этих двух уравнений, получаем два вектора  $\vec{DC}_1 = (-1; 3)$  и  $\vec{DC}_2 = (1; -3)$ . Из них нужно выбрать тот, для которого угол между ним и вектором  $\vec{DO}$  тупой. Так как  $(\vec{DO}, \vec{DC}_1) = -7 < 0$ , а  $(\vec{DO}, \vec{DC}_2) = 7 > 0$ , то  $\vec{DC} = \vec{DC}_1$ . Тогда  $\vec{OC} = \vec{OD} + \vec{DC} = (1; 6)$ .

Умение решать задачи несколькими способами очень важно для понимания и применения изучаемых математических методов. К сожалению, на наш взгляд, такому подходу уделяется недостаточно внимания в школьном курсе математики. Лишь очень немногие школьники могут его применять при решении геометрических задач. Что подтверждается статистикой решения геометрических задач второй (проверяемой) части профильного ЕГЭ. В олимпиаде средний балл для этой задачи оказался по номинациям следующим (из 10 баллов):

- 3,9 для физико-математических направлений подготовки,
- 7,0 для курсантов высших военных училищ,
- 7,2 для технических направлений,
- 5,1 для экономических направлений.

Таким образом, лучше всего эту задачу решали студенты технических специальностей и направлений подготовки.

УДК 534.1

**Д. Ф. Белоножко, Н. М. Садриева**

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова  
Россия, г. Ярославль, e-mail: belonozhko@mail.ru

## **ВВЕДЕНИЕ В ТЕМУ «ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ» ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВУЗОВ и ВТУЗОВ**

*Предлагается простая методика начального знакомства учащихся вузов и втузов с основами теории параметрических колебаний.*

**Ключевые слова:** параметрические колебания, уравнение Маттье, параметрический резонанс

**D. F. Belonozhko, N. M. Sadrieva**

P.G. Demidov Yaroslavl State University  
Russia, Yaroslavl, e-mail: belonozhko@mail.ru

## **INTRODUCTION TO THE "PARAMETRIC OSCILLATIONS" FOR STUDENTS OF UNIVERSITIES AND TECHNICAL COLLEGES**

*A simple methodic of the initial acquaintance of students of universities and technical colleges with the basics of the theory of parametric oscillations is proposed.*

**Keywords:** parametric oscillations, Mathieu equation, parametric resonance

**Введение.** Теория колебаний является важной частью современных образовательных программ [1]. Без её освоения невозможно правильное понимание природных и технологических процессов; эволюционных проблем и даже социальных вопросов современного мира. После изучения курса «Теория колебаний» студенты, как правило, вполне уверенно оперируют с теорией свободных колебаний, хорошо представляют себе математическую модель осциллятора и осознают ей всеобъемлющий характер. Представление же о модели параметрических колебаний в большинстве случаев остается совершенно размытым, а в некоторых случаях даже «фантастически» неверным. Сложившаяся ситуация обусловлена тем, что сама тема «параметрические колебания» завершает курс «Теории линейных колебаний» и на неё зачастую просто не остается аудиторных часов. Кроме того, теория решения уравнения Маттье – основного для обсуждае-

мой темы – довольно трудоемка для беглого знакомства. Эта тема не является непосредственным продолжением теории линейных дифференциальных уравнений и оперирует с некоторым количеством совершенно новых понятий (теория Флоке, мультипликаторы, зоны устойчивости и т.д.) [1, 2]. В настоящем сообщении предлагается методический план качественного знакомства учащихся с основами теории параметрических колебаний, нацеленный на улучшение качества освоения этой темы студентами вузов и втузов.

**1. Модель маятника с периодически изменяющейся длиной.**

Хорошо известно, что основное уравнение модели свободных малых колебаний математического маятника с длиной  $l$  в поле тяжести  $g$  имеет вид [1, 2]:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \tag{1}$$

Здесь  $x \equiv x(t)$  – угол малого отклонения маятника от положения равновесия. Параметр  $\omega = \sqrt{l/g}$  называется круговой частотой собственных колебаний. Общее решение уравнения (1) – простейшее гармоническое колебание:

$$x = a \cos(\omega t + \varphi); a, \varphi - \text{const}. \tag{2}$$

От модели (1), (2) несложно совершить качественный переход к модели колебаний маятника с периодически изменяющейся длиной. Если длина  $l$  отклоняется от некоторого среднего значения  $l_0$  по гармоническому закону  $\Delta l = A \cos(2\Omega t)$  с малой амплитудой  $A$ , то поведение системы естественно попытаться описать тем же уравнением (1), но с переменным параметром

$$\omega = \frac{l}{g} = \frac{l_0 + \Delta l}{g} = \frac{l_0 + A \cos(2\Omega t)}{g} = \frac{l_0}{g} + \frac{A}{g} \cos(2\Omega t). \tag{3}$$

Для удобства работы с обозначениями круговая частота периодического изменения длины маятника обозначена не единым символом, а через  $2\Omega$  (с двойкой в качестве дополнительного множителя). Соответствующая ей циклическая частота обратна периоду  $T$  и равна  $\nu = 1/T = 2\Omega/(2\pi) = \Omega/\pi$  (Гц). Подставляя (3) в (1) и обозначая  $\omega_0^2 \equiv l_0/g$ ;  $2q \equiv A/g$ , получим стандартное уравнение теории параметри-

ческих колебаний - уравнение Матье [1, 2]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\omega_0^2 + 2q \cos(2\Omega t))x = 0. \quad (4)$$

Без претензии на строгость, на качественном уровне удастся перебросить естественный «методический» мостик от хорошо освоенной модели свободных колебаний (1) к модели параметрических колебаний (4).

**2. Универсальный характер уравнения Матье.** Универсальность уравнения (1) как основной модели свободных колебаний бесспорна. Уравнение (1) описывает и колебания пружинного маятника, и изменение тока в колебательном контуре, и многие другие явления. В каждом случае частота  $\omega$  выражается через свои параметры (коэффициент жесткости пружины и массу груза; емкость и индуктивность контура; и т.д.). Если создать условия, в которых один из таких параметров будет изменяться по гармоническому закону с частотой  $\nu = \Omega/\pi$  и амплитуда этого изменения окажется мала по сравнению со средним значением параметра, то модель обязательно приведет к уравнению Матье (4).

Например, пусть в модели маятника изменяется не его длина, а значение параметра  $g$ . На практике этого можно добиться, если заставить точку подвеса совершать вертикальные колебания. При таких осцилляциях точки подвеса её вертикальная координата будет изменяться по закону  $\zeta = B \cos(2\Omega t)$ . В неинерциальной системе отсчета, осциллирующей вместе с точкой подвеса, маятник будет испытывать дополнительное вертикальное ускорение (связанное с действием силы инерции).

$$\Delta g = \frac{d^2\zeta}{dt^2} = -4\Omega^2 B \cos(2\Omega t).$$

Знак «минус» указывает на то, что когда точка подвеса движется вверх, дополнительное ускорение направлено вниз, и наоборот. Для круговой частоты  $\omega$  имеем:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{l}{g + \Delta g} = \frac{l}{g - 4\Omega^2 B \cos(2\Omega t)} = \frac{l}{g} \left( 1 - \frac{4\Omega^2 B}{g} \cos(2\Omega t) \right)^{-1} \approx \\ &\approx \frac{l}{g} \left( 1 + \frac{4\Omega^2 B}{g} \cos(2\Omega t) \right) \\ &\text{при } \frac{4\Omega^2 b}{g} = 1; \quad \omega^2 \approx \frac{l}{g} + 4\Omega^2 B l \cos(2\Omega t). \end{aligned} \quad (5)$$

При выводе приближенного равенства (5) использовано известное



асимптотическое соотношение  $(1 + \varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha \varepsilon$ , справедливое для  $\varepsilon = 1$ . Подставляя (5) в (1) и обозначая  $\omega_0^2 \equiv l/g$ ;  $2q \equiv 4\Omega^2 bl$ , снова приходим к уравнению (4).

В общем случае круговая частота  $\omega$  собственных колебаний выражается через параметры системы. Пусть, например, она зависит от параметра  $p$  и возможно ещё каких-то других параметров:  $\omega^2 = f(p, \dots)$ . Положим, что параметр  $p$  изменяется по гармоническому закону с частотой  $\nu = \Omega/\pi$ :

$$p = p_0 + \Delta p; \quad \Delta p = C \cos(2\Omega t); \quad \Delta p = p_0.$$

Используя разложение в ряд Тейлора по малому приращению аргумента, несложно получить соотношение

$$\omega^2 \approx f(p_0, \dots) + \left( \frac{\partial f}{\partial p} \right)_0 \Delta p = f(p_0, \dots) + \left( \frac{\partial f}{\partial p} \right)_0 C \cos(2\Omega t). \quad (6)$$

Подстановка (6) в (1) и переход к обозначениям  $\omega_0^2 \equiv f(p_0, \dots)$ ;  $2q \equiv \left( \frac{\partial_p f}{\partial p} \right)_0 C$  снова ведет к уравнению Матъе (4).

Проведенные рассуждения на качественном уровне убедительно иллюстрируют универсальный характер уравнения Матъе (4) как достаточно общей модели параметрических колебаний. Всякий раз, когда собственная частота колебательной системы выражается через некоторый параметр, и этот параметр заставляют периодически изменяться на малую величину относительно своего среднего значения, движение системы начинает подчиняться законам параметрических колебаний. Основной математической моделью при этом является уравнение Матъе (4).

**3. Параметрический резонанс.** Наиболее интересным свойством решений уравнения Матъе (4) является возможность неограниченной по амплитуде раскачки колебаний при определенных значениях частоты изменения параметра системы. По-настоящему глубокое освоение всех тонкостей этого явления, называемого параметрическим резонансом, требует знания теории Флоке и умения строить специальные области на плоскости параметров  $(\Omega, q)$ , называемые зонами неустойчивости (см. диаграмму Айнса-Стретта [1, 2]).

Однако для качественного знакомства с темой проще поступить иначе. На маятник с переменной длиной можно посмотреть как на аналоговый вычислительный механизм, моделирующий эволюцию решения

уравнения Матве. С помощью физических соображений несложно найти условия раскачки такого маятника. После этого остается распространить полученный результат на все динамические системы с той же математической моделью (4).

Маятник с переменной длиной в обывательском смысле – качели, которые раскачиваются за счет своевременных приседаний и выпрямлений пассажира (изменения положения центра тяжести). Такой пример достаточно нагляден и понятен аудитории любого уровня подготовки. Несложно даже изготовить действующую модель и поэкспериментировать с ней. В момент прохождения нижнего нейтрального положения  $x = 0$  скорость груза маятника максимальна. При этом сила тяжести полностью уравновешена реакцией подвеса, а её момент относительно оси колебаний равен нулю. В этих условиях выполняется закон сохранения момента импульса. Поэтому, если сократить длину маятника, то угловая скорость вращательного движения, а вместе с ней и линейная скорость груза увеличатся. Возникнет добавка к кинетической энергии, которая в дальнейшем «забросит» груз маятника выше, чем та высота, с которой груз стартовал. С достижением крайнего положения, когда скорость полностью погасится, маятник можно вновь удлинить. Тогда при возвращении в положение  $x = 0$  возможен дополнительный «разгон» груза за счет сокращения длины маятника и т.д. Механизм раскачки будет действовать, если цикл сокращение-удлинение происходит или один раз за полпериода (перемещение из одного крайнего положения в другое); или один раз за период; или один раз за период с половиной, за два периода и т.д. В терминах частот получаются соотношения:

$$\frac{\omega_0}{2\Omega} = \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; \dots; \frac{n}{2}; \dots \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_0}{\Omega} = 1; 2; 3; \dots; n; \dots$$

Формируется целая последовательность параметрических резонансов на частотах:

$$\Omega = \omega_0; \frac{\omega_0}{2}; \frac{\omega_0}{3}; \dots; \frac{\omega_0}{n}; \dots$$

Экспериментально легко установить, что резонанс на частоте  $\Omega = \omega_0$  (без двойки перед  $\Omega$ ) раскачивает маятник наиболее эффективно, а все следующие резонансы оказываются всё менее и менее действенными.

Приходим к общему принципу, свойственному любым параметрическим колебаниям. Пусть колебательная система обладает собственной круговой частотой  $\omega_0$ , которая выражается через параметр  $p$ . Тогда малое периодическое изменение этого параметра с циклической частотой

$\nu = \Omega / \pi$  способно вызвать параметрическую раскачку колебаний, если значения  $\nu$  равны

$$\nu = \frac{\omega_0}{\pi}; \frac{\omega_0}{2\pi}; \frac{\omega_0}{3\pi}; \dots; \frac{\omega_0}{n\pi}; \dots$$

На частоте  $\nu = \omega_0 / \pi$  (Гц) параметрический резонанс проявляется наиболее сильно.

**4. Пример распределенной колебательной системы.** В 1831 году выдающийся английский физик М. Фарадей описал появление периодической рельефной структуры на горизонтальной свободной поверхности жидкости, заполняющей контейнер, который совершает малые вертикальные колебания [3]. С тех пор это явление называется «Неустойчивость Фарадея». Пользуясь развитыми в предыдущих пунктах представлениями несложно сделать оценку для характерного горизонтального размера ячейки ряби Фарадея, не решая сложную гидродинамическую задачу. Заметим, что в системе отсчета, связанной с вертикально колеблющимся контейнером, как и в случае с маятником, у которого осциллирует точка повеса, за счет сил инерции происходит периодическое изменение параметра  $g$ . Естественно предположить, что рябь Фарадея – результат параметрической резонансной раскачки малоамплитудных капиллярно-гравитационных волновых возмущений на поверхности жидкости [4]. На свободной поверхности жидкости круговая частота капиллярно-гравитационных волн связана с их длиной известным из гидродинамики соотношением [4]:

$$\omega_0^2 = g \frac{2\pi}{\lambda} \left( 1 + \frac{\gamma}{\rho g} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \right);$$

где  $\gamma$  - поверхностное натяжение;  $\rho$  - плотность жидкости.

По смыслу  $\omega_0$  и есть собственная частота колебательной системы. Нужно даже говорить о целом семействе частот - своих для каждого значения длины  $\lambda$ . Вертикальные колебания контейнера с частотой  $\nu$  будут провоцировать раскачку волн с частотой  $\omega_0 = \pi\nu$  (на частоте главного резонанса). Поэтому, решив относительно  $\lambda$  уравнение

$$\pi^2 \nu^2 = g \frac{2\pi}{\lambda} \left( 1 + \frac{\gamma}{\rho g} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \right),$$

несложно найти длину волн, формирующих рябь Фарадея, а значит, оценить характерный линейный период, возникающего на поверхности жид-

кости периодического рисунка.

**Заключение.** Разработанная методика позволяет просто и наглядно познакомиться с основами теории параметрических колебаний студентов даже с минимальной математической подготовкой и может быть использована при реализации самых различных образовательных программ технической и естественно-научной направленности.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин М.М.* Теория колебаний: Учеб. для вузов / М.М. Ильин, К.С. Колесников, Ю.С. Саратов. М: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2003. 272 с.
2. *Карлов Н.В.* Колебания, волны, структуры / Н.В. Карлов, Н.А. Кириченко. М: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 496 с.
3. *Faraday M.* On a peculiar class acoustical figures and on certain forms assumed by a group of particles upon elastic surface // Phil. Trans. Roy. Soc., London. 1831. V. 121. P. 209–318.
4. *Белоножко Д.Ф.* О влиянии поверхностного электрического заряда на закономерности реализации неустойчивости Фарадея / Д.Ф. Белоножко, А.А. Очиров, Н.М. Садриева // Волны и вихри в сложных средах: 12-я междунар. конф. – школа молодых ученых (1–3 декабря 2021 г., Москва): сб. материалов школы. М.: ООО «ИСПОпринт», 2021. С. 39–40.

УДК 51:378

**Л. В. Березина, А. В. Васильева, А. И. Бурцев**

Рыбинский государственный авиационный технический университет  
им. П. А. Соловьева  
Россия, г. Рыбинск, e-mail: *berezina\_lv@pisem.net*,  
*vasileva@rsatu.ru*, *byrzev@rsatu.ru*,

**АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РЕШЕНИЯ ОЛИМПИАДНЫХ  
ЗАДАЧ ВСЕРОССИЙСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ  
ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ, ПРОВЕДЕННОЙ  
РГАТУ ИМЕНИ П.А. СОЛОВЬЕВА**

*В статье представлен статистический анализ результатов Всероссийской студенческой олимпиады по математике, проведенной Рыбинским государственным авиационным техническим университетом им. П.А. Соловьева.*

*Ключевые слова:* олимпиадные задачи, научное творчество студентов, математическая подготовка

**L. V. Berezina, A. V. Vasileva, A. I. Burzev**

P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University  
Russia, Rybinsk, e-mail: *berezina\_lv@pisem.net*,  
*vasileva@rsatu.ru*, *byrzev@rsatu.ru*

**ANALYSIS OF THE RESULTS OF SOLVING OLYMPIAD  
PROBLEMS OF THE ALL-RUSSIAN STUDENT  
OLYMPIAD IN MATHEMATICS HELD  
P. A. SOLOVYOV RYBINSK  
STATE TECHNICAL UNIVERSITY**

*The article presents a statistical analysis of the results of the All-Russian Student Olympiad in Mathematics, conducted by P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University.*

*Keywords:* Olympiad problems, scientific creativity of students, mathematical training

В конце ноября 2022 года Рыбинским государственным авиационным техническим университетом им. П.А. Соловьева по согласованию с

ЯГТУ, нашими постоянными партнерами по организации и проведению математических олимпиад [1, 2], проводилась Всероссийская студенческая олимпиада по математике среди студентов и курсантов высших военных училищ первого курса всех специальностей и направлений подготовки. Задачи олимпиады и их решения приведены в статье [3].

Для анализа результатов олимпиады была проведена статистическая обработка полученных данных по той же схеме, что и в [4]. Результаты подводились отдельно по каждой номинации. В таблицах 1-4 представлены расчеты среднего набранного балла, а также моды и медианы полученных данных. Диаграммы значений среднего и медианного баллов, набранных по каждой задаче для представленных специальностей, а также моды приведены на рис. 1-3.

**Таблица 1. Математические специальности**

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Среднее	2,5	2,1	1,9	3,9	1,1	0,3	1,6	2,8	1,9	1,5	0,7
Мода	0	0	1,5	1,5	0	0	0	0	0	0	0
Медиана	0	0	2	10	0	0	0	0	0	0	0

**Таблица 2. Военные специальности**

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Среднее	3,1	1,5	1,6	7	0,2	0,7	1	0,9	0	0,1	1,5
Мода	0	0	1	9,5	0	0	0	1	0	0	0
Медиана	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0

**Таблица 3. Технические специальности**

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Среднее	0,4	1	1,0	6,9	0,5	0,2	0,9	1,4	0,8	1,0	1,6
Мода	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0
Медиана	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0

**Таблица 4. Экономические специальности**

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Среднее	2,1	0	0,7	3,3	0,1	0,1	0,4	0,6	0	0	0,4
Мода	0	0	0	2,5	0	0	0	0	0	0	0
Медиана	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

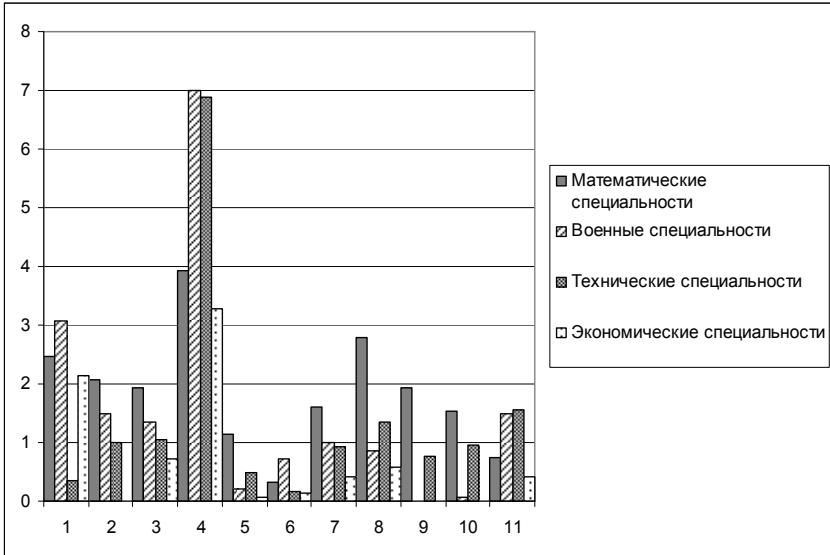


Рис. 1. Диаграмма значений среднего балла, набранного по каждой задаче для представленных специальностей

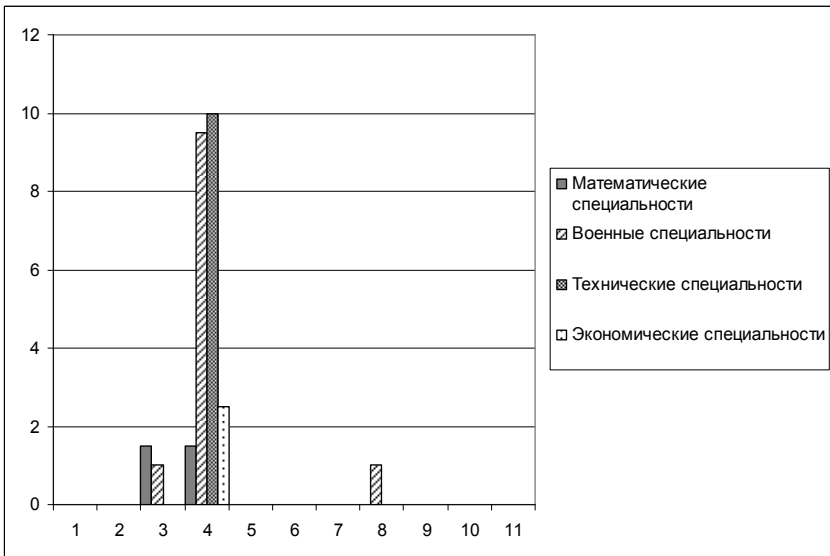
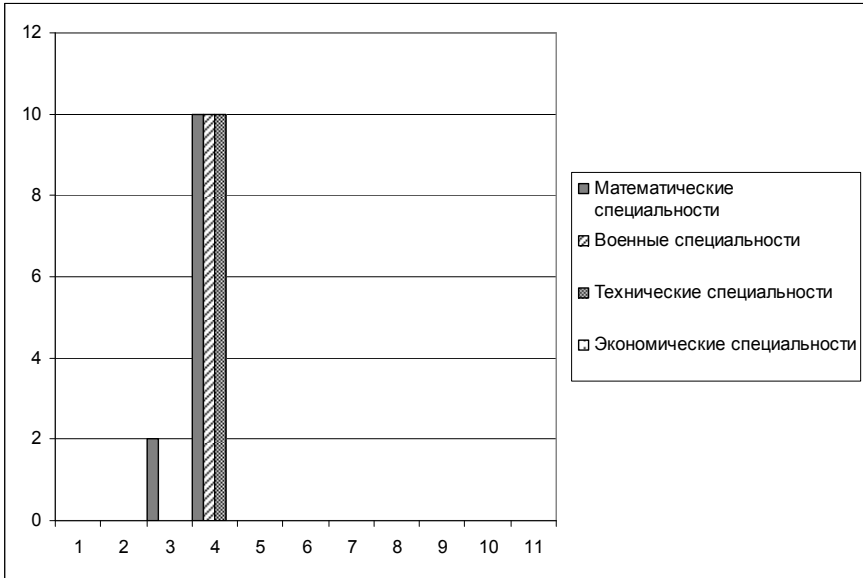


Рис. 2. Диаграмма значений медианного балла, набранного по каждой задаче для представленных специальностей



**Рис. 3. Диаграмма значений моды, по каждой задаче для представленных специальностей**

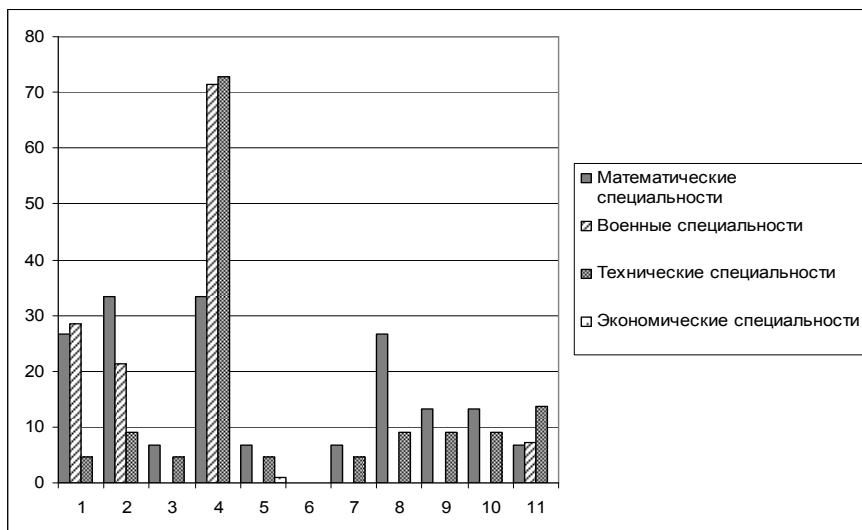
Чтобы оценить уровень решаемости задач, предложенных участникам олимпиады, были проведены расчеты процентного количества участников, набравших не менее 6 баллов за задачу. Результаты представлены в табл. 5.

**Таблица 5**

Специальности	Номер задачи										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Математические специальности	27	33	7	33	7	0	7	27	13	13	7
Военные специальности	29	21	0	71	0	0	0	0	0	0	7
Технические специальности	5	9	5	73	5	0	5	9	9	9	14
Экономические специальности	21	0	0	21	0	0	0	7	0	0	0

Для удобства сравнения результаты представлены на диаграмме (рис. 4).





**Рис. 4. Диаграмма распределения процентного количества участников, набравших не менее 6 баллов за задачу**

Анализ диаграммы показывает, что хороших успехов добились представители математических специальностей. Большинство из них решили более половины предложенных задач, хоть и не за все получили высший балл. Но с задачей № 4 лучше справились представители военных и технических специальностей. На диаграмме видно, что задача № 4 и оказалась самой решаемой. Эта задача относилась к разделу «Аналитическая геометрия» и предполагала построение математической модели и её анализ.

Следующими по решаемости можно считать задачи № 1 и № 2. В задаче № 1 необходимо было вычислить предел функции, в задаче № 2 найти функцию, удовлетворяющую заданному алгебраическому соотношению.

Самыми сложными оказались задачи № 3, 5, 6, 7. В задаче № 3 необходимо было проанализировать поведение функции, содержащей абсолютные величины аргумента. Задача № 5 предполагала анализ вида многочлена при заданных условиях. В задаче № 6 нужно было решить тригонометрическое неравенство на заданном интервале. Задача № 7 требовала преобразования определителя  $n$ -го порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Оленикова Ю.К.* Задания Всероссийской студенческой олимпиады по математике 2022 года / Ю.К. Оленикова, В.Ш. Ройтенберг // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 18. Ярославль, Изд-во ЯГТУ. 2023. С. 93-101.
2. *Оленикова Ю.К.* Анализ результатов Всероссийской студенческой олимпиады по математике 2022 года / Ю.К. Оленикова, В.Ш. Ройтенберг // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 18. Ярославль, Изд-во ЯГТУ. 2023. С. 86-92.
3. *Васильева А.В.* Задачи Всероссийской студенческой олимпиады по математике, проведенной РГАТУ имени П.А. Соловьева / А.В. Васильева, Л.В. Березина, А.И. Бурцев // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 18. Ярославль, Изд-во ЯГТУ. 2023. С. 58-67.
4. Анализ результатов решения олимпиадных задач / М. А. Башкин, А. И. Бурцев, А. В. Васильева, Л. В. Березина // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 17. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2021. С. 57-64.

УДК 51:378

**А. В. Васильева, Л. В. Березина, А. И. Бурцев,  
М.А. Башкин**

Рыбинский государственный авиационный технический университет  
им. П. А. Соловьева  
Россия, г. Рыбинск, e-mail: [vasileva@rsatu.ru](mailto:vasileva@rsatu.ru), [berezina\\_lv@pisem.net](mailto:berezina_lv@pisem.net),  
[byrzev@rsatu.ru](mailto:byrzev@rsatu.ru)

**ЗАДАЧИ ВСЕРОССИЙСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ  
ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ, ПРОВЕДЕННОЙ  
РГАТУ ИМЕНИ П.А. СОЛОВЬЕВА**

*В статье представлены задачи Всероссийской студенческой олимпиады по математике среди студентов и курсантов первого курса высших военных училищ всех специальностей и направлений подготовки, проведенной Рыбинским государственным авиационным техническим университетом им. П.А. Соловьева.*

**Ключевые слова:** олимпиадные задачи, научное творчество студентов, математическая подготовка

**A. V. Vasileva, L. V. Berezina, A. I. Burzev, M. A. Bashkin**

P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University  
Russia, Rybinsk, e-mail: [vasileva@rsatu.ru](mailto:vasileva@rsatu.ru), [berezina\\_lv@pisem.net](mailto:berezina_lv@pisem.net),  
[byrzev@rsatu.ru](mailto:byrzev@rsatu.ru)

**TASKS OF THE ALL-RUSSIAN STUDENT OLYMPIAD  
IN MATHEMATICS HELD P.A. SOLOVYOV RYBINSK  
STATE TECHNICAL UNIVERSITY**

*The article presents the tasks of the All-Russian Student Olympiad in Mathematics among first-year students and cadets of higher military schools of all specialties and areas of training conducted by P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University.*

**Keywords:** *Olympiad problems, scientific creativity of students, mathematical training*

26 ноября 2022 года на базе РГАТУ им. П.А. Соловьева состоялась Всероссийская студенческая олимпиада по математике среди студентов и курсантов высших военных училищ всех специальностей и направлений подготовки. С 2021 года в Ярославской области проводятся две Всерос-

сийские студенческие математические олимпиады: на базе ЯГТУ и на базе РГАТУ [1–3]. Проводятся они согласованно и в тесном сотрудничестве. В этом году мы договорились, что ЯГТУ проводит в начале учебного года и для студентов старших курсов [4–5], а РГАТУ ближе к окончанию первого семестра только для первокурсников. Поэтому при составлении заданий авторы ориентировались на основные разделы школьного курса математики: «Начала математического анализа», «Матричная алгебра» и «Аналитическая геометрия».

Рассмотрим конкурсные задания и их решения.

*Задача 1.* Найдите  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \left( \sqrt{\frac{2}{n}} \right)$ .

*Решение:*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \left( \sqrt{\frac{2}{n}} \right) &= \left| \sqrt{\frac{2}{n}} = z, n = \frac{2}{z^2}, n \rightarrow \infty \Rightarrow z \rightarrow 0 \right| = \lim_{z \rightarrow 0} (\cos z)^{\frac{2}{z^2}} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} (1 + (\cos z - 1))^{\frac{2}{z^2}} = \lim_{z \rightarrow 0} (1 + (\cos z - 1))^{\frac{1}{\cos z - 1} \cdot \frac{2(\cos z - 1)}{z^2}} = e^{-1} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $\frac{1}{e}$ .

*Задача 2.* Функция  $f(x)$  определена при всех  $x \in \mathbb{R}$  и удовлетворяет соотношению  $(x-1)f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - f(x) = x$  при всех  $x \neq 1$ . Найдите все такие функции.

*Решение:* Подставив в данном уравнении вместо  $x$  дробь  $\frac{x+1}{x-1}$ , получаем уравнение

$$\frac{2}{x-1} f(x) - f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{x+1}{x-1}.$$

Из системы уравнений

$$\begin{cases} (x-1)f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - f(x) = x, \\ \frac{2}{x-1} f(x) - f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{x+1}{x-1} \end{cases}$$

находим  $f(x) = 2x+1$ . Проверка показывает, что данная функция удовлетворяет уравнению.

*Ответ:*  $f(x) = 2x+1$ .

**Задача 3.** Дана функция  $f(x) = |4-4|x|| - 2$ . Сколько решений имеет уравнение  $f(f(x)) = x$ ?

**Решение:** Пусть  $x_0$  – решение уравнения  $f(f(x)) = x$ , а  $y_0 = f(x_0)$ . Тогда и  $x_0 = f(y_0)$ , а потому точка с координатами  $(x_0, y_0)$  лежит на каждой из кривых  $y = f(x)$  и  $x = f(y)$ . Наоборот, если точка  $(x_0, y_0)$  лежит на пересечении этих кривых, то  $y_0 = f(x_0)$  и  $x_0 = f(y_0)$ , откуда  $f(f(x_0)) = x_0$ . Тем самым показано, что число решений уравнения  $f(f(x)) = x$  совпадает с числом точек пересечения кривых  $y = f(x)$  и  $x = f(y)$ , а их 16 (рис. 1).

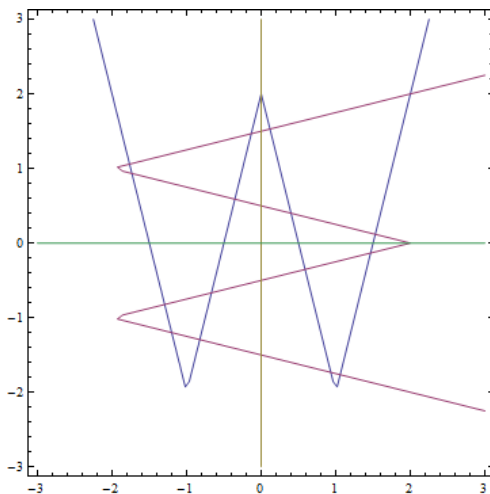


Рис. 1

Ответ: 16.

**Задача 4.**  $ABC$  – прямоугольный равнобедренный треугольник.  $AB$  – гипотенуза этого треугольника.  $A(-1, 2)$ ,  $B(5, 4)$ . Найдите вершину  $C$  треугольника  $ABC$ , если она и начало координат точка  $O$  лежат по разные стороны от прямой  $AB$ .

**Решение:** Построим описанную окружность  $\Delta ABC$  (рис. 2). Её центр лежит на середине отрезка  $AB$  в точке  $D(2, 3)$ . Радиус окружности равен  $R = \left| \overline{AD} \right| = \sqrt{10}$ . Уравнение окружности  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$ . Вектор  $\overline{AB} = (6, 2) \perp \overline{CD}$ . (Медиана является и высотой в равнобедренном треугольнике). Уравнение прямой  $CD$  имеет вид

$$6(x-2) + 2(y-3) = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 9 = 0.$$

Точку  $C$  находим из системы уравнений

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 = 10 \\ 3x + y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 = 10 \\ y = 9 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 9 - 3x \\ 10(x-2)^2 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 9 - 3x \\ 10(x-2)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 6. \\ x = 3, \\ y = 0. \end{cases}$$

Итак,  $C(1, 6)$  или  $C(3, 0)$ . По условию подходит только  $C(1, 6)$ .

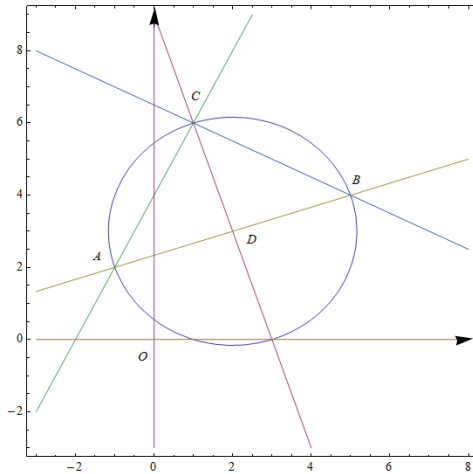


Рис. 2

Ответ:  $C(1, 6)$ .

**Задача 5.** Многочлен  $P(x)$  степени  $n$  имеет  $n$  различных действительных корней. Какое наибольшее число его коэффициентов может равняться нулю?

**Решение:** Между любыми двумя корнями дифференцируемой функции есть корень ее производной. Поэтому производная  $P'(x)$  имеет, по крайней мере,  $n - 1$  различных действительных корней. Поскольку  $P'(x)$  — многочлен степени  $n - 1$ , отсюда следует, что все его действительные корни различны. По индукции тем же свойством обладают и все производные  $P^{(k)}(x)$  ( $k = 2, \dots, n - 1$ ). Из этого следует, что из любых двух идущих подряд коэффициентов многочлена  $P(x)$  хотя бы один не равен 0.

В самом деле, пусть у  $P(x)$  равны нулю коэффициенты при  $x^k$  и  $x^{k+1}$ . Тогда у  $P^{(k)}(x)$  равны нулю свободный член и коэффициент при  $x$ . Но это означает, что  $0$  – кратный корень многочлена  $P^{(k)}(x)$ , все корни которого должны быть различными. Разобьем коэффициенты многочлена  $P(x)$  на пары стоящих рядом (оставив при четном  $n$  старший коэффициент без пары). Поскольку старший коэффициент многочлена не равен  $0$ , число нулевых коэффициентов не превышает числа полных пар, т. е.  $n/2$  при четном  $n$  и  $(n+1)/2$  при нечетном. С другой стороны, многочлены  $(x^2 - 1)(x^2 - 4) \dots (x^2 - k^2)$  и  $x(x^2 - 1) \dots (x^2 - k^2)$  дают примеры, когда число нулевых коэффициентов равно  $n/2$  при  $n = 2k$  и  $(n+1)/2$  при  $n = 2k+1$ .

Ответ:  $n/2$  при  $n$  - четном,  $(n+1)/2$  при  $n$  - нечетном.

Задача 6. Докажите, что при  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  выполняется неравенство

$$\cos x < \frac{\sin^2 x}{x^2}.$$

Решение: Рассмотрим функцию  $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} - x$ , непрерывную на

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]. f(0) = 0.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x \sqrt{\cos x} + \sin x \frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}{\cos x} - 1 = \\ &= \sqrt{\cos x} + \frac{\sin^2 x}{2 \cos x \sqrt{\cos x}} - 1 = \sqrt{\cos x} + \frac{1}{2 \cos x \sqrt{\cos x}} - \frac{\sqrt{\cos x}}{2} - 1 = \\ &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{\cos x} + \frac{1}{\cos x \sqrt{\cos x}} \right) - 1 \geq \frac{1}{\sqrt{\cos x}} - 1. \end{aligned}$$

На интервале  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$   $f'(x) > 0$ , следовательно, функция  $f$  является строго возрастающей на  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Так как  $f(0) = 0$ , то  $\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} - x > 0$  на интервале  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Отсюда следует, что  $\cos x < \frac{\sin^2 x}{x^2}$  на интервале  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Задача 7. Найдите определитель порядка  $n$

$$\begin{vmatrix} a & a & \dots & a & b \\ a & a & \dots & b & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & b & \dots & a & a \\ b & a & \dots & a & a \end{vmatrix}.$$

(На побочной диагонали стоят  $b$ , вне неё  $a$ .)

Решение: Прибавим к первой строке все остальные строки и вынесем общий множитель первой строки за определитель:

$$\begin{vmatrix} a & a & \dots & a & b \\ a & a & \dots & b & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & b & \dots & a & a \\ b & a & \dots & a & a \end{vmatrix} = ((n-1)a+b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a & a & \dots & b & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & b & \dots & a & a \\ b & a & \dots & a & a \end{vmatrix} =$$

$$= ((n-1)a+b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & b-a & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b-a & \dots & 0 & 0 \\ b-a & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= ((n-1)a+b)(b-a)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$



Последний определитель порядка  $n-1$ . Находим его:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n (-1)^{n-1} \dots (-1)^3 \cdot 1 = (-1)^{\frac{(n+3)(n-2)}{2}}.$$

$$\begin{vmatrix} a & a & \dots & a & b \\ a & a & \dots & b & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & b & \dots & a & a \\ b & a & \dots & a & a \end{vmatrix} = ((n-1)a+b)(b-a)^{n-1} (-1)^{n+1} (-1)^{\frac{(n+3)(n-2)}{2}} =$$

$$= ((n-1)a+b)(b-a)^{n-1} (-1)^{\frac{n^2+3n-4}{2}} = ((n-1)a+b)(b-a)^{n-1} (-1)^{\frac{n^2+3n}{2}}.$$

Ответ:  $(-1)^{\frac{n^2+3n}{2}} ((n-1)a+b)(b-a)^{n-1}$ .

Задача 8. Найдите область определения функции

$$f(x) = \arcsin(\arcsin x) + \arccos\left(\frac{2 \arccos x}{\pi - 2}\right).$$

Решение:

$$D(y) : \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ -1 \leq \arcsin x \leq 1, \\ -1 \leq \frac{2 \arccos x}{\pi - 2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ -\sin 1 \leq x \leq \sin 1, \\ -\frac{\pi - 2}{2} \leq \arccos x \leq \frac{\pi - 2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\sin 1 \leq x \leq \sin 1, \\ \arccos x \leq \frac{\pi}{2} - 1 \end{cases}.$$

Так как  $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ , то неравенство  $\arccos x \leq \frac{\pi}{2} - 1$  равносильно неравенству  $\arcsin x \geq 1$ . Поэтому

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1, \\ -\sin 1 \leq x \leq \sin 1, \\ \arccos x \leq \frac{\pi}{2} - 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1, \\ -\sin 1 \leq x \leq \sin 1, \\ \arcsin x \geq 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1, \\ -\sin 1 \leq x \leq \sin 1, \\ \sin x \geq 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = \sin 1.$$

Ответ:  $x = \sin 1$ .

Задача 9. Даны 20 чисел: 2, 3, 4, ..., 20, 21.

1) Какое наибольшее количество попарно взаимно простых чисел можно выбрать из приведенных 20 чисел?

2) Докажите, что если из приведенных 20 чисел выбрать любые 12, то обязательно найдутся два числа, из которых одно делится на другое.

Решение:

Обозначим:  $M = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21\}$ ,  $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$  – простые числа из множества  $M$ ,  $|A|$  – число элементов множества  $A$ . Ясно, что  $|M| = 20$ ,  $|P| = 8$ .

1) Пусть  $n$  – наибольшее количество попарно взаимно простых чисел, которые можно выбрать из приведенных 20 чисел. Рассмотрим подмножество  $T$  множества  $M$ , такое, что  $|T| > 8$ . Принцип Дирихле утверждает, что во множестве  $T$  есть два числа, делящихся на одно и то же простое число. Следовательно, множество  $T$  содержит два числа, не являющиеся взаимно простыми, и потому  $n \leq 8$ . Числа множества  $P$  попарно взаимно просты,  $|P| = 8$ . Следовательно,  $n \geq 8$ . Из того, что  $n \leq 8$  и  $n \geq 8$  следует что  $n = 8$ .

2) Разобьем множество  $M$  на следующие подмножества  $\{2, 4, 8, 16\}$ ,  $\{3, 6, 12\}$ ,  $\{5, 10, 20\}$ ,  $\{7, 14\}$ ,  $\{9, 18\}$ ,  $\{11\}$ ,  $\{13\}$ ,  $\{15\}$ ,  $\{17\}$ ,  $\{19\}$ ,  $\{21\}$ . Количество подмножеств разбиения равно 11. Подмножества интересны тем, что если выбраны какие-то два числа из одного подмножества, то одно из них обязательно делится на другое. Пусть  $N$  – произвольное подмножество множества  $M$ , содержащее 12 чисел. Из принципа Дирихле следует, что какие-либо два числа множества  $N$  попадут в одно из множеств  $\{2, 4, 8, 16\}$ ,  $\{3, 6, 12\}$ ,  $\{5, 10, 20\}$ ,  $\{7, 14\}$ ,  $\{9, 18\}$  и одно из них делится на другое.

Ответ: 1) 8.

Задача 10.  $x^2 + (1 - y)^2 + (x - y)^2 = \frac{1}{3}$ . Найдите  $x + y$ .

Решение. Перепишем уравнение в виде  $x^2 - yx + (y^2 - y + \frac{1}{3}) = 0$ . Это квадратное уравнение относительно  $x$ . Его дискриминант

$$D = y^2 - 4y^2 + 4y - \frac{4}{3} = -3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2.$$

Уравнение имеет корни, если  $D = -3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 \geq 0$ . Отсюда  $y = \frac{2}{3}$ . Подставив это значение в исходное уравнение, получим,  $x = \frac{1}{3}$ . Следовательно,  $x + y = 1$ .

*Ответ:*  $x + y = 1$ .

*Задача 11.* Найдите число решений уравнения

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{3840}$$

в целых числах.

*Решение:* Так как  $3840 = 15 \cdot 2^8$ , то

$$\begin{aligned}\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{3840} &\Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3840} - \sqrt{y} \Rightarrow x = 3840 - 2\sqrt{3840y} + y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^5\sqrt{15y} = 3840 + y - x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{3840} &\Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3840} - \sqrt{y} \Rightarrow x = 3840 - 2\sqrt{3840y} + y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^5\sqrt{15y} = 3840 + y - x,\end{aligned}$$

$2^{10} \cdot 15y = (3840 + y - x)^2$  – полный квадрат, следовательно, все простые множители входят в него с чётными показателями. Отсюда  $y = 15 \cdot a^2$ ,  $a \geq 0$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ .

Аналогично,  $x = 15 \cdot b^2$ ,  $b \geq 0$ ,  $b \in \mathbb{Z}$ .

Теперь  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 16\sqrt{15} \Leftrightarrow a + b = 16$ . Последнее уравнение имеет 17 решений в целых неотрицательных числах.

*Ответ:* 17.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Задачи IV межрегиональной студенческой олимпиады по математике (II этапа Всероссийской студенческой олимпиады) // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 14. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2019. С. 61-73.

2. Задачи Всероссийской студенческой олимпиады по математике, посвященной 950-летию г. Рыбинска / М.А. Башкин, А.И. Бурцев, А.В. Васильева, Л.В. Березина. // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 17. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2021. С. 51-56.
3. *Оленикова Ю.К.* Задания и итоги Всероссийской студенческой олимпиады по математике 2021 года / Ю.К. Оленикова, В.Ш. Ройтенберг // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 17. Ярославль, Изд-во ЯГТУ. 2022. С. 88-95.
4. *Оленикова Ю.К.* Задания Всероссийской студенческой олимпиады по математике 2022 года / Ю.К. Оленикова, В.Ш. Ройтенберг // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 18. Ярославль, Изд-во ЯГТУ. 2023. С. 93-101.
5. *Оленикова Ю.К.* Анализ результатов Всероссийской студенческой олимпиады по математике 2022 года / Ю.К. Оленикова, В.Ш. Ройтенберг // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 18. Ярославль, Изд-во ЯГТУ. 2023. С. 86-92.

УДК 517.3

**В. А. Зубов, Г. Е. Козлов**

Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны  
Россия, г. Ярославль, e-mail: 8.34608@gmail.com., kge2064@gmail.com.

## **НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ РЯДОВ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ**

*В данной статье рассматриваются примеры вычисления определенных и несобственных интегралов с помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд, а также несобственных интегралов от степенных рядов.*

**Ключевые слова:** *определенный и несобственный интегралы, числовые и функциональные ряды, разложение функции в степенной ряд*

**V. A. Zubov, G. E. Kozlov**

Yaroslavl Higher Military School of Air Defense, Russia, Yaroslavl  
e-mail: 8.34608@gmail.com, kge2064@gmail.com

## **SOME APPLICATIONS OF SERIES THEORY FOR COMPUTING OF INTEGRALS**

*This article discusses examples of calculating definite and improper integrals by decomposing a subintegral function into a power series, as well as improper integrals from power series.*

**Keywords:** *definite and improper integrals, numerical and functional series, decomposition of a function into a power series*

В данной статье рассмотрим примеры использования разложения функции в степенной ряд для вычисления некоторых нестандартных интегралов, которые можно использовать при подготовке учащихся к математическим олимпиадам [1].

**Пример 1.** Вычислить

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x+x^2+\dots+x^n+\dots)}{x} dx.$$

**Решение.** Воспользуемся формулой разложения функции  $y = |x|$  на отрезке  $[-\pi; \pi]$  в тригонометрический ряд Фурье:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

При  $x = 0$  имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Так как  $1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$ , то числитель подынтегрального выражения равен  $-\ln(1-x)$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln(1+x+x^2+\dots)}{x} dx &= -\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = \int_0^1 \frac{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots}{x} dx = \\ &= \int_0^1 \left( 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \dots \right) dx. \end{aligned}$$

Почленно интегрируя подынтегральную функцию, получим

$$\int_0^1 \left( 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \dots \right) dx = x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots \Big|_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Таким образом, 
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x+x^2+\dots+x^n+\dots)}{x} dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

**Пример 2.** Вычислить  $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x - 1}$ .

**Решение 1.**

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x - 1} = \left| \begin{array}{l} t = e^{-x} - 1 \\ x = -\ln(1+t) \\ dx = -(1+t)^{-1} dt \end{array} \right| = \int_{-1}^0 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \int_{-1}^0 \left( t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots \right) dt =$$

$$= \int_{-1}^0 \left( 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} - \frac{t^3}{4} + \dots \right) dt = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \dots$$

**Решение 2.**

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x - 1} &= \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x (1 - e^{-x})} dx = \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x} \left( \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \right) dx = \int_0^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} x e^{-(n+1)x} \right) dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x e^{-(n+1)x} dx = \end{aligned}$$

Далее, интегрируя по частям, получим

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x e^{-(n+1)x}}{-(n+1)} \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{-(n+1)} \int_0^{\infty} e^{-(n+1)x} dx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**Пример 3.** Вычислить  $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x + 1}$ .

**Решение.** Так как

$$\int \frac{dx}{e^x + 1} = \int \frac{d e^x}{e^x (e^x + 1)} = \ln \frac{e^x}{e^x + 1} + C,$$

то, интегрируя по частям, получим

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x + 1} = \left| \begin{array}{l} u = x, \\ v = \ln \frac{e^x}{e^x + 1} \end{array} \right| = x \ln \frac{e^x}{e^x + 1} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \ln \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int_0^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{e^x} \right) dx.$$

Поскольку  $0 < e^{-x} < 1$  при  $x > 0$ , то подынтегральную функцию можно разложить в ряд

$$\ln \left( 1 + \frac{1}{e^x} \right) = \ln (1 + e^{-x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx}.$$

Интегрируя почленно, получаем

$$\int_0^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{e^x} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int_0^{\infty} e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

Найдем сумму данного знакочередующегося ряда

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n)^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n)^2} = \frac{\pi^2}{12}. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x + 1} = \frac{\pi^2}{12}$ .

**Пример 4.** Вычислить  $\int_0^{\ln 2} \frac{x dx}{1 - e^{-x}}$ .

**Решение.**

$$\int_0^{\ln 2} \frac{x dx}{1 - e^{-x}} = \int_0^{\ln 2} \frac{x \cdot e^x dx}{e^x - 1} = \int_0^{\ln 2} \frac{x \cdot de^x}{e^x - 1}.$$

Сделаем замену:  $e^x - 1 = t \Rightarrow x = \ln|t + 1|$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \frac{x \cdot de^x}{e^x - 1} &= \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{nt} dt = \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^1 t^{n-1} dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} t^n \Big|_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_0^{\ln 2} \frac{x dx}{1 - e^{-x}} = \frac{\pi^2}{12}.$$

**Пример 5.**

Вычислить  $\int_0^{\pi/2} \ln 2 \cos x dx$ .

**Решение.** Представим подынтегральную функцию в комплексном виде

$$\int_0^{\pi/2} \ln 2 \cos x dx = \int_0^{\pi/2} \ln 2 \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} dx = \frac{\pi/2}{2} \int_0^{\pi/2} \ln e^{ix} (1 + e^{-2ix}) dx =$$



$$= \int_0^{\pi/2} \ln e^{ix} dx + \int_0^{\pi/2} \ln(1 + e^{-2ix}) dx = \int_0^{\pi/2} ix dx + \int_0^{\pi/2} \ln(1 + e^{-2ix}) dx = I.$$

Воспользуемся тем, что  $\ln(1 + e^{-2ix}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-2inx}$ , тогда

$$\begin{aligned} I &= \frac{ix^2}{2} \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-2inx} dx = \frac{i\pi^2}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int_0^{\pi/2} e^{-2inx} dx = \\ &= \frac{i\pi^2}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{e^{-2inx}}{-2in} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{i\pi^2}{8} - \frac{1}{2i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} (e^{-\pi in} - 1). \end{aligned}$$

С учетом того, что  $e^{-\pi in} - 1 = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ чётное,} \\ -2, & \text{если } n \text{ нечётное,} \end{cases}$  получим

$$I = \frac{i\pi^2}{8} + \frac{1}{i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = i \left( \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{8} \right) = 0.$$

### Пример 6.

Вычислить  $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} dx$ .

**Решение.** Применяя почленное интегрирование, получим

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left( \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} + \dots \right) dx = \\ &= - \left( \ln \cos \frac{x}{2} + \ln \cos \frac{x}{4} + \dots + \ln \cos \frac{x}{2^n} + \dots \right) \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = - \ln \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} \Big|_{\pi/6}^{\pi/2}. \end{aligned}$$

Умножим  $\prod_{n=1}^k \cos \frac{x}{2^n} = \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^k}$  на  $\sin \frac{x}{2^k}$  и поделим на

$\sin \frac{x}{2^k}$ , тогда искомым предел будет выглядеть следующим образом:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^k} \cdot \sin \frac{x}{2^k} \cdot 2^k}{2^k \cdot \sin \frac{x}{2^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2^k \cdot \sin \frac{x}{2^k}} = \frac{\sin x}{x}.$$

Используя полученное значение бесконечного произведения, найдем исходный интеграл:

$$I = -\ln \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{\sin x}{x} \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \ln \frac{3}{2}.$$

Таким образом  $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} dx = \ln \frac{3}{2}.$

**Пример 7.**

Вычислить  $\int \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{b=1}^{\infty} \frac{x^b}{e^{ax} b!} dx.$

**Решение.** Преобразуем интеграл от двойной суммы.

$$\begin{aligned} \int \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{b=1}^{\infty} \frac{x^b}{e^{ax} b!} dx &= \sum_{a=2}^{\infty} \int \sum_{b=1}^{\infty} \frac{x^b}{e^{ax} b!} dx = \sum_{a=2}^{\infty} \frac{1}{e^{ax}} \int \sum_{b=1}^{\infty} \frac{x^b}{b!} dx = \\ \sum_{a=2}^{\infty} \frac{1}{e^{ax}} \int_0^{\infty} (e^x - 1) dx &= \sum_{a=2}^{\infty} \int_0^{\infty} (e^{x-ax} - e^{-ax}) dx = \sum_{a=2}^{\infty} \int_0^{\infty} (e^{(1-a)x} - e^{-ax}) dx = \\ \sum_{a=2}^{\infty} \left( -\frac{e^{-(1-a)x}}{a-1} + \frac{e^{-ax}}{a} \right) \Big|_0^{\infty} &= \sum_{a=2}^{\infty} \left( \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a} \right) = \sum_{a=2}^{\infty} \frac{1}{a-1} - \sum_{a=2}^{\infty} \frac{1}{a} = \\ &= 1 + \sum_{a=2}^{\infty} \frac{1}{a} - \sum_{a=2}^{\infty} \frac{1}{a} = 1. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\int \sum_{a=2}^{\infty} \sum_{b=1}^{\infty} \frac{x^b}{e^{ax} b!} dx = 1.$

**Пример 8.**

Доказать, что  $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin^4 x \cdot \ln \cos^2 x}{\operatorname{tg} x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$

**Решение.**

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin^4 x \cdot \ln \cos^2 x}{\operatorname{tg} x} dx = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin x \cdot \ln \cos^2 x}{\operatorname{tg} x} dx.$$

Сделаем замену  $t = \ln \sin x \rightarrow dt = \frac{1}{\operatorname{tg} x} dx$ . Тогда

$$e^t = \sin x \rightarrow e^{2t} = \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x = 1 - e^{2t}, \quad \ln \cos^2 x = \ln |1 - e^{2t}|.$$

при  $x = 0$ ,  $t = -\infty$ ;  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $t = 0$ .

$$I = 4 \int_{-\infty}^0 t \ln(1 - e^{2t}) dt = 4 \int_{-\infty}^0 t \int_0^{e^{2t}} \frac{-1}{1-y} dy \cdot dt = -4 \int_{-\infty}^0 t \int_0^{e^{2t}} \sum_{n=0}^{\infty} y^n dy dt.$$

Поскольку  $t < 0$ ,  $0 < y < 1$ , получаем

$$\begin{aligned} I &= -4 \int_{-\infty}^0 t \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{e^{2t}} y^n dy dt = -4 \int_{-\infty}^0 t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n+1} \Big|_0^{e^{2t}} dt = \\ &= -4 \int_{-\infty}^0 t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} \Big|_0^{e^{2t}} dt = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{-\infty}^0 t e^{2nt} dt = \\ &= -4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{t e^{2nt}}{2n} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{2n} \int_{-\infty}^0 e^{2nt} dt \right) = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( -\frac{1}{4n^2} e^{2nt} \Big|_{-\infty}^0 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Всеармейские олимпиады по математике 1996-2005 гг. для курсантов высших военных учебных заведений Министерства обороны Российской Федерации. История. Результаты. Задачи. Решения / под ред. В.Д. Лукьянова; ВИТУ, 2006. 189 с.

УДК 51-74

**Т. В. Левчук**

Российский университет транспорта  
(Московский институт инженеров транспорта)  
Россия, г. Москва, e-mail: Levchuktv@yandex.ru

## **ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ВАГОНА НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ Д'АЛАМБЕРА И ЛАГРАНЖА**

*Имитационное моделирование заключается в создании математической модели, основанной на дифференциальных уравнениях аналитической механики Д'Аламбера и Лагранжа, в которых кузов и рамы тележек представляются либо как балка на двух опорах, либо как система нескольких дискретных масс, соединенных упругими связями. Подобные имитационные модели предназначены для оценки динамического нагружения кузова с последующим анализом напряжений в его узлах и вычислении упругих сил.*

**Ключевые слова:** теоретическая механика и прикладная теория колебаний, динамика подвижного состава, колебания вагонной тележки, дифференциальные уравнения Д'Аламбера и Лагранжа II рода

**T. V. Levchuk**

Russian University of Transport  
(Moscow Institute of Transport Engineers)  
Russia, Moscow, e-mail: Levchuktv@yandex.ru

## **SIMULATION OF CARRIAGE VIBRATIONS BASED ON THE DIFFERENTIAL EQUATIONS OF D'ALEMBERT AND LAGRANGE**

*Simulation modeling consists in creating a mathematical model based on the differential equations of analytical mechanics of D'Alembert and Lagrange, in which the body and frames of trolleys are represented either as a beam on two supports, or as a system of several discrete masses connected by elastic bonds. Such simulation models are designed to assess the dynamic loading of the body with subsequent analysis of stresses in its nodes and calculation of elastic forces.*

**Keywords:** Theoretical mechanics and applied theory of oscillations, dynamics of rolling stock, carriage vibrations, D'Alembert and Lagrange differential equations of the second kind

Основой теоретических и экспериментальных исследований динамики подвижного состава являются классические уравнения динамики

теоретической механики. Изучение процессов колебаний подвижного состава, вызванное взаимодействием частей подвижного состава между собой и железнодорожным путем, позволяет с определенной долей надежности описывать динамические процессы, возникающие при движении подвижного состава по железнодорожному пути, моделировать реальные состояния системы вагон–путь и просчитывать ситуации, связанные с безопасностью движения, снижением колебаний и динамических сил, отрицательно влияющих на отдельные узлы и конструкцию подвижного состава в целом [1–4].

Данное направление имеет богатую историю, сложившиеся научные направления, преподавательский состав, математический аппарат для создания и описания имитационного моделирования конкретного направления задач. В частности, в Московском государственном университете путей сообщения (МИИТ) сложились и получили дальнейшее развитие две крупные школы динамики подвижного состава. Под руководством профессоров Л.А. Шадура и С.В. Вершинского сложилась научная школа динамики и прочности вагонов, представителями которой являются В.Н. Котуранов, В.Д. Хусидов, А.А. Хохлов, П.С. Анисимов, В.Н. Филиппов, П.А. Устич, Г.И. Петров и другие.

Наиболее важными, глобальными задачами данного направления при изучении и дальнейшем моделировании рассматриваются научно-технические проблемы, связанные с исследованием колебаний подвижного состава, его взаимодействием с верхним строением пути, исследованием ударных взаимодействий вагонов, в частности, с исследованием прочности конструкций вагонной тележки. В основе имитационного моделирования лежит теория подобия, в соответствии с которой можно создать механическую модель, динамические свойства которой будут тождественны реальному объекту. Математическое моделирование исторически делится на два направления, связанные с линейным и нелинейным моделированием большого количества входных параметров.

Анализ колебательных процессов линейных систем основывается на основных положениях теоретической механики и прикладной теории колебаний, представленной линейными дифференциальными уравнениями, решение которых находится в виде известных элементарных функций. Также для анализа линейных дифференциальных уравнений часто применяются аналитические методы: теория устойчивости, нахождение собственных значений и векторов и теория возмущений, используемая для оптимизации параметров динамических систем.

Вариационный принцип применительно к движению механической системы может быть сформулирован так: если действительное движение системы описывается координатами  $x_j(t)$ , то работа сил, действующих на систему при вариации этих координат  $\delta x_j$ , должна равняться нулю.

В данном случае вариации координат  $\delta x_j$  равны

$$\delta x_j = x_j - x'_j, \quad (1)$$

где  $x'_j$  – координаты любого бесконечно близкого движения.

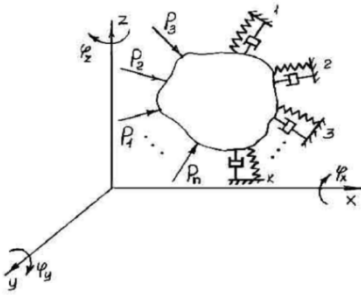


Рис. 1

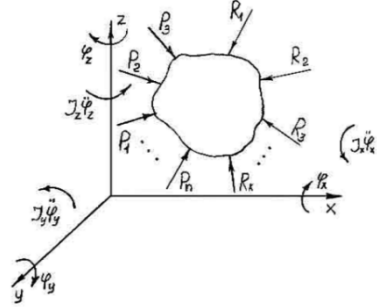


Рис. 2

Классическое решение подобной задачи сводится к отбрасыванию связей (рис. 1) и замене их действия реакциями  $R_1, R_2, \dots, R_n$ . Приложим к телу инерционные силы и инерционные моменты (рис. 2). Тогда уравнения движения тела в декартовых координатах примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + \sum_{i=1}^n P_{x_i} + \sum_{j=1}^k R_{x_j} &= 0; \\ m\ddot{y} + \sum_{i=1}^n P_{y_i} + \sum_{j=1}^k R_{y_j} &= 0; \\ m\ddot{z} + \sum_{i=1}^n P_{z_i} + \sum_{j=1}^k R_{z_j} &= 0; \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} I_x \ddot{\varphi}_x + \sum_{i=1}^n M_{x_i P_i} + \sum_{j=1}^k M_{x R_j} &= 0; \\ I_y \ddot{\varphi}_y + \sum_{i=1}^n M_{y_i P_i} + \sum_{j=1}^k M_{y R_j} &= 0; \\ I_z \ddot{\varphi}_z + \sum_{i=1}^n M_{z_i P_i} + \sum_{j=1}^k M_{z R_j} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $m$  – масса тела;  $\ddot{x}$  – ускорение тела вдоль оси  $x$ ;

$P_{x_i}, P_{y_i}$  и  $P_{z_i}$  – проекции силы с номером  $i$  на оси  $x, y$  и  $z$  соответственно;

$R_{x_j}, R_{y_j}$  и  $R_{z_j}$  – проекции реакций связей с номером  $j$  на оси  $x, y$  и  $z$  соответственно;

$M_{x R_j}, M_{y R_j}$  и  $M_{z R_j}$  – моменты реакций  $R_j$  относительно осей  $x, y$  и  $z$ ;

$I_x, I_y$  и  $I_z$  – моменты инерции твердого тела относительно осей  $x, y$  и  $z$ ;

$\ddot{x}, \ddot{y}$  и  $\ddot{z}$  – линейные ускорения тела в направлении осей  $x, y$  и  $z$ ;

$\ddot{\varphi}_x, \ddot{\varphi}_y$  и  $\ddot{\varphi}_z$  – угловые ускорения тела при вращении его относительно осей  $x, y$  и  $z$ .

Таким образом, для описания движения жесткого тела в декартовых координатах имеем шесть уравнений д'Аламбера вида (2) относительно шести координат  $x, y, z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ .

В уравнении (2) суммирование по  $i$  и  $j$  производится алгебраически с учетом знака силы и момента.

Инерционные силы по второму закону Ньютона равны массе, умноженной на ускорение, и направлены в сторону, обратную ускорению. В нашем примере (рис. 2) вследствие выбора (произвольного) положительного направления осей координат, положительное ускорение  $\ddot{x}$  направлено вправо, а инерционная сила  $m\ddot{x}$  – влево (см. рис. 2). То же самое можно сказать о направлении инерционных сил  $m\ddot{y}$ ,  $m\ddot{z}$  и инерционных моментов  $I_x\ddot{\varphi}_x$ ,  $I_y\ddot{\varphi}_y$  и  $I_z\ddot{\varphi}_z$  (см. рис. 2) в нашем примере.

Реакции  $R_j$  на расчетной схеме (см. рис. 2) направляются так, как бы они действовали при положительной деформации связей.

Вариационный принцип для движения тела в обобщенных координатах запишется следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right) \delta q_i = 0, \quad (3)$$

где  $T$  – кинетическая энергия рассматриваемой механической системы;

$q_i$  и  $\dot{q}_i$  – обобщенные координаты и обобщенные скорости;

$\delta q_i$  – вариация  $i$ -й обобщенной координаты по типу выражения (1);

$Q_i$  – обобщенная сила, действующая в направлении координаты  $q_i$ .

В силу независимости вариаций  $\delta q_i$  получаем уравнение Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (4)$$

В выражениях (3) и (4) кинетическая энергия системы равна

$$T = \sum_{i=1}^{n-k} \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 + \sum_{n=k-1}^n \frac{1}{2} I \dot{q}_i^2. \quad (5)$$

В выражении (5) первый член дает кинетическую энергию поступательного движения, а второй член – вращательного. В данном случае  $k$  – угловых координат,  $(n - k)$  – линейных координат,  $n$  – общее количество координат.

Если кинетическая энергия не зависит от обобщенных координат  $q_i$ , а зависит только от обобщенных скоростей  $\dot{q}_i$ , как это принято в выраже-

нии (5), то  $\frac{\partial T}{\partial q_i} = 0$  и уравнение Лагранжа будет иметь вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (6)$$

Если на систему наложены связи, то значения  $Q_i$  в уравнении (6) являются реакциями в связях. В общем случае, когда связи оказывают упругое и неупругое сопротивления, обобщенные силы равны

$$Q_i = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}, \quad (7)$$

где  $\Pi$  – потенциальная энергия системы;  $\Phi$  – функция рассеивания, равная мощности, развиваемой силами неупругого сопротивления.

Подставив (7) в (6), получим уравнение Лагранжа второго рода в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0. \quad (8)$$

Из сказанного следует, что для формального описания движения механических систем в декартовых или обобщенных координатах необходимо воспользоваться либо принципом д’Аламбера в форме (2), либо уравнением Лагранжа второго рода в форме (8).

В практических исследованиях часто рассматриваются не пространственные, а плоские траектории тела. То есть исследуют движение тела в какой-то одной плоскости, а иногда даже в направлении только одной из шести координат. Так, на рис. 3 приведены примеры колебательных систем, совершающих движение только в направлении координаты  $z$ . Причем системы, изображенные на рис. 3, а, б, совершают вынужденные колебания от воздействия силы  $P(t)$ , а система, изображенная на рис. 3, в, будет совершать собственные колебания при отклонении ее от положения равновесия.

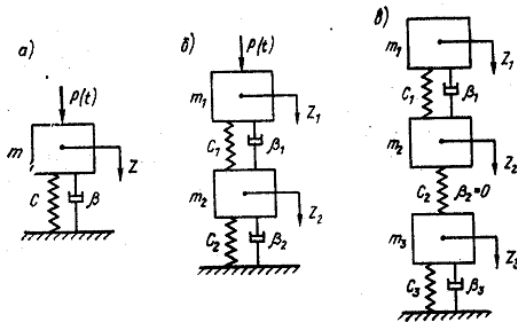


Рис. 3



На рис. 4 приведены два примера угловых (рис. 4, а) и угловых и линейных (рис. 4, б) колебаний твердого тела (собственных колебаний).

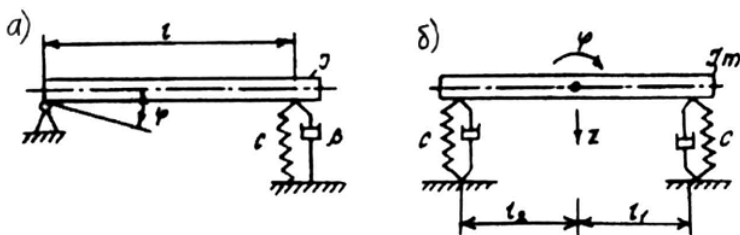


Рис. 4

Для того чтобы формально описать движение (колебания) представленных на рис. 3 и 4 механических систем, можно на выбор воспользоваться или уравнениями д'Аламбера (2), или уравнением Лагранжа II рода (8). Чтобы воспользоваться уравнениями (2) необходимо на расчетных схемах (см. рис. 3 и 4) отбросить связи, заменив их реакциями ( $R$ ), приложить к каждому телу силу инерции и инерционный момент и записать уравнения равновесия указанных тел под действием внешней силы  $P(t)$ , инерционных сил и реакций связей  $R$ . Такое преобразование расчетных схем показано на рис. 5 и 6. При этом полагаем, что положительной деформацией является деформация сжатия связей.

В нашем случае (см. рис. 3 и 4) реакции связей  $R$  состоят из упругих и неупругих составляющих. Упругие составляющие представляют усилия, вызванные деформациями пружин, а неупругие – усилия в гасителях (демпферах). В простейшем случае реакция пружины представляет произведение жесткости на деформацию, а реакция демпфера – произведение коэффициента сопротивления  $\beta$  на скорость деформации.

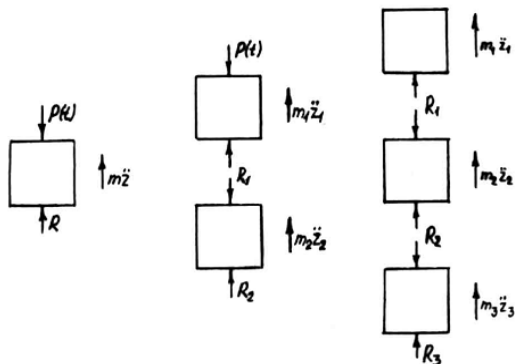


Рис. 5

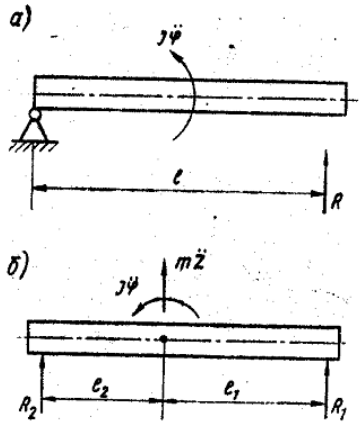


Рис. 6

Воспользовавшись описанным правилом для схемы рис. 5, а, получим следующее дифференциальное уравнение

$$m\ddot{z} + R = P(t). \quad (9)$$

Для схемы рис. 5, б имеем два уравнения

$$\left. \begin{aligned} m_1\ddot{z}_1 + R_1 &= P(t); \\ m_2\ddot{z}_2 - R_1 + R_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Для схемы рис. 5, в имеем три уравнения

$$\left. \begin{aligned} m_1\ddot{z}_1 + R_1 &= 0; \\ m_2\ddot{z}_2 - R_1 + R_2 &= 0; \\ m_3\ddot{z}_3 - R_2 + R_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Аналогично получаем дифференциальные уравнения колебания тел, изображенных на рис. 6.

Для схемы (рис. 6, а) имеем

$$I\ddot{\varphi} + Rl = 0. \quad (12)$$

Для схемы (рис. 6, б):

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{z} + R_1 + R_2 &= 0; \\ I\ddot{\varphi} + R_1l_1 - R_2l_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Полученные дифференциальные уравнения записаны в неявной форме, так как реакции связей  $R$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ , и  $R_3$  пока еще не определены. В нашем случае (см. рис. 3 и 4) реакции связей  $R$  состоят из упругих и неупругих составляющих. Упругие составляющие представляют усилия, вызванные деформациями пружин, а неупругие – усилия в гасителях (демпферах). В простейшем случае реакция пружины представляет произведение жесткости на деформацию, а реакция демпфера – произведение коэффициента сопротивления  $\beta$  на скорость деформации. Так для механической системы, изображенной на рис. 3, а, реакция  $R$  равна

$$R = \beta \dot{z} + cz. \quad (14)$$

Подставив (14) в (9), получим дифференциальное уравнение колебаний механической системы (см. рис. 3, а) в явном виде

$$m\ddot{z} + \beta \dot{z} + cz = P(t). \quad (15)$$

Реакция связей  $R_1$  и  $R_2$  для механической системы, изображенной на рис. 3, б, будут равны

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \beta_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + c_1(z_1 - z_2); \\ R_2 &= \beta_2\dot{z}_2 + c_2z_2. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Подставив (16) в (10), получим

$$\left. \begin{aligned} m_1\ddot{z}_1 + \beta_1\dot{z}_1 - \beta_1\dot{z}_2 + c_1z_1 - c_1z_2 &= P(t); \\ m_2\ddot{z}_2 - \beta_1\dot{z}_1 + (\beta_1 + \beta_2)\dot{z}_2 - c_1z_1 + (c_1 + c_2)z_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Для механической системы, изображенной на рис. 3, в, реакции связей  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \beta_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + c_1(z_1 - z_2); \\ R_2 &= c_2(z_2 - z_3), \text{ так как } (\beta_2 = 0); \\ R_3 &= \beta_3\dot{z}_3 + c_3z_3. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Подставив (16) в (11), получим

$$\left. \begin{aligned} m_1\ddot{z}_1 + \beta_1\dot{z}_1 - \beta_1\dot{z}_2 + c_1z_1 - c_1z_2 &= 0; \\ m_2\ddot{z}_2 - \beta_1\dot{z}_1 + \beta_1\dot{z}_2 - c_1z_1 + (c_1 + c_2)z_2 - c_2z_3 &= 0; \\ m_3\ddot{z}_3 + \beta_3\dot{z}_3 - c_2z_2 + (c_2 + c_3)z_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Для механических систем, изображенных на рис. 4, реакции связей  $R_1$ ,  $R_2$ , и  $R_3$  будут иметь следующий вид:

$$R = \beta l \dot{\varphi} + c l \varphi ; \left. \begin{array}{l} R_1 = \beta(\dot{z} + l_1 \dot{\varphi}) + c(z + l_1 \varphi); \\ R_2 = \beta(\dot{z} - l_2 \dot{\varphi}) + c(z - l_2 \varphi). \end{array} \right\} \quad (20)$$

Подставив (20) в (12) и (13), получим дифференциальные уравнения колебаний указанных механических систем в следующем виде:

- для схемы (см. рис. 4, а):

$$I \ddot{\varphi} + \beta l^2 \dot{\varphi} + c l^2 \varphi = 0; \quad (21)$$

- для схемы (см. рис. 4, б):

$$\left. \begin{array}{l} m \ddot{z} + 2\beta \dot{z} + \beta(l_1 - l_2) \dot{\varphi} + 2cz + c(l_1 - l_2) \varphi = 0; \\ I \ddot{\varphi} + \beta(l_1 - l_2) \dot{z} + \beta(l_1^2 + l_2^2) \dot{\varphi} + c(l_1 - l_2) z + \\ + c(l_1^2 + l_2^2) \varphi = 0. \end{array} \right\} \quad (22)$$

Из (22) видно, что при  $l_1 = l_2$ , т.е. когда центр поворота совпадает с центром симметрии тела,  $l_1 - l_2 = 0$  и система (22) распадается на два независимых дифференциальных уравнения.

Таким образом, для формального описания колебательных процессов в простейших механических системах (см. рис. 3 и 4) были использованы уравнения аналитической механики в виде принципа д'Аламбера (3). Так же для этой же цели могут быть использованы уравнения Лагранжа второго рода в форме (8). Для этой цели необходимо выразить полную кинетическую энергию системы  $T$ , потенциальную энергию  $\Pi$  и функцию рассеивания  $\Phi$  через принятые обобщенные координаты и их производные. Затем, дифференцируя  $T$ ,  $\Pi$  и  $\Phi$  по правилу, указанному в (8), и приравняв сумму этих производных нулю, получим дифференциальные уравнения соответствующих колебательных процессов.

Рассмотрим это на примере механической системы, изображенной на рис. 3, а.

Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} m \dot{z}^2. \quad (23)$$

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = \frac{1}{2} c z^2 - \int P(t) dz. \quad (24)$$

где первый член выражает энергию сжатия пружины, а второй – работу силы  $P(t)$  на перемещении  $z$ .

Функция рассеивания  $\Phi$  представляет мощность, развиваемую силами неупругого сопротивления. В простейшем случае

$$\Phi = \frac{1}{2} \beta \dot{z}^2. \tag{25}$$

Дифференцируя (23) – (25) по правилу, указанному в (8), получим

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) = m\ddot{z}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{z}} = \beta \dot{z}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial z} = cz - P(t). \tag{26}$$

Подставляя (26) в (8), получим дифференциальное уравнение колебаний механической системы, изображенной на рис. 3, а, в виде

$$m\ddot{z} + \beta \dot{z} + cz = P(t). \tag{27}$$

Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение (27), которое полностью совпадает с дифференциальным уравнением (14), введенным на основе принципа д’Аламбера.

Рассмотрим еще один пример использования уравнения Лагранжа II рода для описания колебаний системы, представленной на рис. 3, б:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}_2^2; \\ \Pi &= \frac{1}{2} c_1 (z_1 - z_2)^2 - \int P(t) dz_1 + \frac{1}{2} c_2 z_2^2; \\ \Phi &= \frac{1}{2} \beta_1 (\dot{z}_1 - \dot{z}_2)^2 + \frac{1}{2} \beta_2 \dot{z}_2^2; \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_1} \right) &= m_1 \ddot{z}_1, & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_2} \right) &= m_2 \ddot{z}_2; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{z}_1} &= \beta_1 (\dot{z}_1 - \dot{z}_2), & \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{z}_2} &= -\beta_1 \dot{z}_1 + (\beta_1 + \beta_2) \dot{z}_2; \\ \frac{\partial \Pi}{\partial z_1} &= c_1 (z_1 - z_2) - P(t), & \frac{\partial \Pi}{\partial z_2} &= -c_1 z_1 + (c_1 + c_2) z_2. \end{aligned} \right\} \tag{28}$$

Из (28) и (8) следует

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + \beta_1 \dot{z}_1 - \beta_1 \dot{z}_2 + c_1 z_1 - c_1 z_2 &= P(t); \\ m_2 \ddot{z}_2 - \beta_1 \dot{z}_1 + (\beta_1 + \beta_2) \dot{z}_2 - c_1 z_1 + (c_1 + c_2) z_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{29}$$

Сравнивая (17) и (29), видим, что принцип д'Аламбера и уравнение Лагранжа II рода дают один и тот же результат.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левчук Т.В.* Математическое моделирование и расчет характеристик простейших колебательных процессов подвижных частей вагона // Современные проблемы железнодорожного транспорта: сб. науч. тр. кафедры «Нетяговый подвижной состав», посвящ. 70-летию РОАТ. М.: ФГАОУ ВО «Российский ун-т транспорта», 2021. С. 132-136.
2. *Масштаков А.П.* Системы регулирования, направленные на обеспечение безопасности на железнодорожном транспорте / А.П. Масштаков, С.В. Нестеров // В серии конференций ИОР: материаловедение и инженерия (том 862). Изд-во Института физики. (16-18 апреля 2020). URL: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/862/3/032079>
3. *Масштаков А.П.* Распределение нагрузки по осям погрузчика в зависимости от условий работы / А.П. Масштаков, Р.Р. Хакимзянов // Серии конференций ИОР: Наука о Земле и окружающей среде. Т. 548 «Экологическая инженерия и менеджмент, Технология горнодобывающей промышленности и обработки почвы». Изд-во Института физики (июнь 2020, опубликована 1 сентября 2020 г.). URL: <https://doi.org/10.1088/1755-1315/548/5/052044>
4. *Садыкова О.И.* Применение математического моделирования при решении транспортно-технологических и инженерных задач технических специальностей / О.И. Садыкова, Т.В. Левчук // Современные проблемы железнодорожного транспорта: сб. науч. тр. кафедры «Нетяговый подвижной состав», посвящ. 70-летию РОАТ. М.: ФГАОУ ВО «Российский ун-т транспорта», 2021. С. 118-123.

УДК 51:378

**Ю. К. Оленикова, В. Ш. Ройтенберг**

Ярославский государственный технический университет,  
Россия, г. Ярославль, e-mail: olenikovajk@mail.ru, vroitenberg@mail.ru

## **АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ВСЕРОССИЙСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ 2022 ГОДА**

*Приведены итоги Всероссийской студенческой олимпиады по математике, проведенной Ярославским государственным техническим университетом для студентов второго и старших курсов нематематических специальностей вузов в 2022 году, проведен анализ итогов. Обсуждается перспектива проведения математических олимпиад в Центральной России.*

**Ключевые слова:** студенческая математическая олимпиада, решение задач

**Ju. K. Olenikova, V. Sh. Roitenberg**

Yaroslavl State Technical University,  
Russia, Yaroslavl, e-mail: olenikovajk@mail.ru, vroitenberg@mail.ru

## **ANALYSIS OF RESULTS ALL-RUSSIAN STUDENT OLYMPIAD IN MATHEMATICS 2022**

*The results of the All-Russian Student Olympiad in Mathematics held by the Yaroslavl State Technical University for second- and senior-year students of non-mathematical specialties of universities in 2022 are presented, the analysis of the results is carried out. The perspective of mathematical Olympiads in Central Russia is discussed.*

**Keywords:** student mathematical Olympiad, task solution

**Краткие сведения об олимпиаде.** Всероссийская олимпиада по математике для нематематических специальностей образовательных организаций высшего образования проходила с 29 сентября по 1 октября 2022 года на базе Ярославского государственного технического университета.

Было подано 125 заявок из 29 вузов, а к участию в олимпиаде прибыли 92 студента и курсанта из 23 вузов (11 военных академий и училищ и 12 гражданских университетов) двенадцати регионов четырех федеральных округов России: Центрального, Северо-Западного, Уральского и Приволжского.

**Список вузов-участников олимпиады:** ТГТУ (Тамбов); ВА ВКО (Тверь); ВА РВСН (Балашиха); ФВА РВСН (Серпухов); МГТУ

им. Н.Э. Баумана, РТУ МИРЭА и НИУ МГСУ (Москва); ВУРЭ (Череповец); ИАТЭ НИЯУ МИФИ (Обнинск); СПбГЭУ, ВКА им. А.Ф. Можайского и Военная академия связи (Санкт-Петербург; ПГНИУ (Пермь); ЯГТУ, ЯрГУ и ЯВВУ ПВО (Ярославль); РГАТУ (Рыбинск); ВА РХБЗ (Кострома); РГРТУ (Рязань); Академия ФСО России (Орёл); ВУНЦ ВВС «ВВА» (Воронеж); ТВВИКУ (Тюмень).

В рамках одной олимпиады проводились два конкурса: среди обучающихся на 2-м курсе (вчерашних первокурсников) и старшекурсников, которые в соответствии с рабочими программами уже закончили изучение курса высшей математики. Пять заданий у них были одинаковыми, а пять разные, поэтому итоги среди них подводились раздельно. Второкурсников было 43 участника, старшекурсников – 49.

### **Победителями и призерами олимпиады стали**

#### **• среди старших курсов:**

##### **в личном конкурсе**

##### **I место**

Петраков Иван Анатольевич (ВА ВКО)

Литвин Алексей Сергеевич (ВА РВСН)

##### **II место**

Кравченко Ольга Андреевна (ВА ВКО)

Лебедев Егор Сергеевич (ВКА им. А.Ф. Можайского)

##### **III место**

Скоробогатова Анастасия Владимировна (ВА ВКО)

Афанасьев Егор Николаевич (ВУНЦ ВВС «ВВА»)

Рахлина Валерия Вячеславовна (ИАТЭ НИЯУ МИФИ)

Сотин Андрей Александрович (ПГНИУ)

##### **в командном зачете**

**I место** заняли курсанты ВА ВКО

**II место** – курсанты ВА РВСН и ВУНЦ ВВС «ВВА»

**III место** – студенты ИАТЭ НИЯУ МИФИ, ПГНИУ, а также курсанты ВКА им. А.Ф. Можайского и ФВА РВСН

#### **• среди второкурсников:**

##### **в личном конкурсе**

##### **I место**

Дворецкая Александра Николаевна (ЯГТУ)

##### **II место**

Косицына Анастасия Васильевна (ЯГТУ)

##### **III место**

Морозов Егор Павлович (МГТУ им. Н.Э. Баумана)



**в командном зачете**

**I место** заняла команда студентов ЯГТУ

**II место** – команда студентов МГТУ им. Н.Э. Баумана

**III место** – команды курсантов ФВА РВСН и ВУРЭ

Среди участников вне конкурса Сигаева Валерия Владимировна, курсантка 5-го курса ВА ВКО, набрала наибольшее количество баллов из всех старшекурсников, и решением жюри она награждена дипломом за

**I место (вне конкурса).**

Для анализа итогов олимпиады приведем задания олимпиады без решений. Примеры решения задач даны в статье [1].

**Задания для студентов 2-го курса**

1. Найти все верхнетреугольные матрицы второго порядка

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

2022-я степень которых является единичной матрицей.

2. Пусть  $\vec{a}$  – заданный ненулевой вектор в пространстве. Найти все векторы  $\vec{x}$ , такие, что  $\vec{x} \times (\vec{a} \times \vec{x}) + \vec{a} \times (\vec{x} \times \vec{a}) = \vec{0}$ , где  $\times$  – векторное произведение.

3. При каком значении параметра  $a$  прямые, заданные каноническими уравнениями

$$\frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{a} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z}{3}$$

пересекаются? Найти точку пересечения.

4. Найти все корни уравнения  $3^x - 6x + 3 = 0$ .

5. Найти предел  $\lim_{x \rightarrow +0} (1 - x^x)^x$ .

6. Найти все дифференцируемые функции  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , такие, что

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(1+2x) - 2f'(1-2x) = x.$$

7. При каких значениях параметров  $p \in [-1, 1]$  и  $q \in [-1, 1]$  квадратное уравнение  $z^2 + pz + q = 0$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , имеет корень с наибольшим модулем?

8. Пусть непрерывная функция  $f(x)$ ,  $x \in [a, b]$  такова, что

$\int_a^b x^n f(x) dx = 0$  при всех целых  $n$ ,  $0 \leq n \leq N$ . Показать, что  $f(x)$  имеет на отрезке  $[a, b]$  по меньшей мере  $N+1$  нуль.

9. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_x^{1/x} \cos \pi t^2 dt$ .

10. Вычислить  $\int_0^{\infty} \frac{x^2 - a^2}{x^4 + a^4} dx$ .

**Задания для студентов старших курсов**

1. Найти все верхнетреугольные матрицы второго порядка

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

2022-я степень которых является единичной матрицей.

2. Пусть  $\vec{a}$  – заданный ненулевой вектор в пространстве. Найти все векторы  $\vec{x}$ , такие, что  $\vec{x} \times (\vec{a} \times \vec{x}) + \vec{a} \times (\vec{x} \times \vec{a}) = \vec{0}$ , где  $\times$  – векторное произведение.

3. Доказать, что множество комплексных чисел  $z$ , удовлетворяющих уравнению  $|z^2 - z| = 1$ , является замкнутой кривой, задаваемой уравнением  $z = f(\varphi)e^{i\varphi}$ , где  $f(\varphi)$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$ , – действительная непрерывная положительная  $2\pi$ -периодическая функция.

4. Найти предел  $\lim_{x \rightarrow +0} (1 - x^x)^x$ .

5. Пусть непрерывная функция  $f(x)$ ,  $x \in [a, b]$  такова, что  $\int_a^b x^n f(x) dx = 0$  при всех целых  $n$ ,  $0 \leq n \leq N$ . Показать, что  $f(x)$  имеет на отрезке  $[a, b]$  по меньшей мере  $N + 1$  нуль.

6. Вычислить  $\int_0^{\infty} \frac{x^2 - a^2}{x^4 + a^4} dx$ .

7. Доказать, что для любого  $x \in (0, \infty)$  интеграл  $\int_x^{+\infty} \sin t^2 dt$  сходится и

$$\left| \int_x^{+\infty} \sin t^2 dt \right| \leq \frac{1}{x}.$$

8. Найти сумму ряда  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - n}{2^n}$ .

9. Найти все непрерывные функции  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , такие что  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \int_{-x}^x f(t) dt.$$

10. Найти все решения  $y(x)$ ,  $x \in (0, \infty)$ , дифференциального уравнения

$$y'' + \frac{2}{x} y' + 2y = 0, \text{ для которых } \lim_{x \rightarrow +0} y(x) = 1.$$

### Анализ результатов прошедшей олимпиады и перспективы математического олимпиадного движения

Результаты решения задач отражены в таблицах 1 и 2. Такая форма публикации результатов была использована авторами впервые при освещении итогов предыдущей олимпиады [2]. Она удобна для анализа, прежде всего заинтересованным лицам: участникам, тренерам, организаторам будущих студенческих математических олимпиад и составителям задач. Такие таблицы позволяют очень быстро установить приоритетные задачи для участников, слабые места в их подготовке, определить стратегию в работе тренеров и составителей задач.

При сравнении табл. 1 и 2 с соответствующими таблицами из [2] видно, что большинство показателей увеличились. Хотя при проверке работ ощущения были совсем другие (видимо, сказывался, как принято теперь говорить, человеческий фактор). Увеличение показателей, по видимому, частично связано и с предложенным набором заданий.

Таблица 1. Результаты второкурсников

Номер задачи	Доля приступивших к решению задачи, %	Доля правильно решивших задачу, %	
		от общего числа участников	от числа приступивших к решению
1.	93	30	33
2.	81	17	20
3.	80	37	45
4.	100	30	30
5.	85	10	12
6.	66	17	26
7.	80	10	12
8.	0	0	0
9.	42	17	41
10.	79	12	15

**Таблица 2. Результаты старшекурсников**

Номер задачи	Доля приступивших к решению задачи, %	Доля правильно решивших задачу, %	
		от общего числа участников	от числа приступивших к решению
1.	100	40	40
2.	100	25	7
3.	29	2	39
4.	90	23	25
5.	27	0	0
6.	94	25	40
7.	29	5	14
8.	86	30	36
9.	84	5	15
10.	37	25	67

**Таблица 3. Сравнение результатов правильных решений пяти одинаковых заданий второкурсниками и старшекурсниками**

Номер задания	1	2	5	8	10
Второкурсники	30%	17%	10%	-	12%
Старшекурсники	40%	25%	23%	-	25%

Красноречиво выглядит и табл. 3. Естественно, напрашивается вывод о нежелательных последствиях особенностей последних лет [2]. Учитывая это, очень сложно сделать объективные выводы по итогам олимпиады. Также трудно делать предположения и о перспективах олимпиадного движения. ВСО как организация исчезла. С одной стороны, это даже удобно, т.к. исчезли никому не нужные изнурительные заявки и отчеты. Наступила свобода для организаторов олимпиад. Но их ряды с каждым годом уменьшаются. Многие вузы вообще прекратили олимпиадную деятельность. Последним ярким примером этого является ЮРГТУ (НПИ), г. Новочеркасск. Минобрнауки России пишет в своих планах и отчетах про Всероссийскую олимпиаду школьников, т.к. ее победители имеют льготы при поступлении в вуз, хотя этой олимпиадой занимается Министерство просвещения. Удобно! А вот что будет, если Всероссийские студенческие олимпиады исчезнут из отчетов при аккредитации вузов? Ответ, наверное, понятен.

В настоящее время Всероссийские олимпиады, в которых еще есть смысл участвовать провинциальным вузам, насчитываются единицами. В Центральной России Всероссийские олимпиады продолжает проводить ЯГТУ (Ярославль). Начал проводить физико-математические олимпиады

РГРТУ (Рязань). Надеемся, будет продолжать математические олимпиады вступивший несколько лет тому назад в сотрудничество с ЯГТУ по части организации и проведения олимпиад РГАТУ (Рыбинск). В этом году мы вместе с ними распределили проведение Всероссийской студенческой олимпиады по математике таким образом, что они проводят только для первокурсников [3–4], а мы для второкурсников и старшекурсников. Вопрос о следующем годе, являющемся аккредитационным для обоих наших вузов, в настоящее время остается открытым. Два военных вуза ВАРХБЗ (Кострома) и ВКА (Тверь) проводят межрегиональные олимпиады. И наконец МГТУ имени Н.Э. Баумана провел в этом году первую межрегиональную олимпиаду по математике.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Оленикова Ю.К.* Задания Всероссийской студенческой олимпиады по математике 2022 года / Ю.К. Оленикова, В.Ш. Ройтенберг // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 18. Ярославль, Изд-во ЯГТУ. 2023. С. 93-101.
2. *Оленикова Ю.К.* Задания и итоги Всероссийской студенческой олимпиады по математике 2021 года / Ю.К. Оленикова, В.Ш. Ройтенберг // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 17. Ярославль, Изд-во ЯГТУ. 2022. С. 88-95.
3. *Березина Л.В.* Анализ результатов решения задач Всероссийской студенческой олимпиады по математике, проведенной РГАТУ имени П.А. Соловьева / Л.В. Березина, А.В. Васильева, А.И. Бурцев // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 18. Ярославль, Изд-во ЯГТУ. 2023. С. 52-57.
4. *Васильева А.В.* Задачи Всероссийской студенческой олимпиады по математике, проведенной РГАТУ имени П.А. Соловьева / А.В. Васильева, Л.В. Березина, А.И. Бурцев // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 18. Ярославль, Изд-во ЯГТУ. 2023. С. 58-67

УДК 51:378

**Ю. К. Оленикова, В. Ш. Ройтенберг**

Ярославский государственный технический университет,  
Россия, г. Ярославль, *e-mail: olenikovajk@mail.ru, vroitenberg@mail.ru*

## **ЗАДАНИЯ ВСЕРОССИЙСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ 2022 ГОДА**

*Приведены задачи Всероссийской студенческой олимпиады по математике для студентов нематематических специальностей вузов, проведенной Ярославским государственным техническим университетом в 2022 году, а также примеры их возможного решения.*

**Ключевые слова:** студенческая математическая олимпиада, решение задач

**Ju. K. Olenikova, V. Sh. Roitenberg**

Yaroslavl State Technical University,  
Russia, Yaroslavl, *e-mail: olenikovajk@mail.ru, vroitenberg@mail.ru*

## **TASKS AND RESULTS OF THE ALL-RUSSIAN STUDENT OLYMPIADS IN MATH 2022**

*The problems of the All-Russian Student Olympiad in Mathematics for students of non-mathematical specialties of universities, held by the Yaroslavl State Technical University in 2022, as well as examples of their possible solution are given.*

**Keywords:** student mathematical Olympiad, task solution

**Введение.** Об организации Всероссийской студенческой олимпиады по математике 2022 г. и ее итогах см. статью [1]. Здесь приводятся все задачи олимпиады с решениями.

Как неоднократно отмечалось [2–10], каждая следующая олимпиада ЯГТУ, отличается от предыдущих. Всевозможные особенности последних лет (резкое и значительное уменьшение часов в учебных программах по математике в большинстве технических вузов, дистанционное обучение на протяжении значительного времени в школах и вузах, и т.д.) заставили авторов ограничиться приглашением на олимпиаду студентов только нематематических специальностей и разделить задания на две части: для второкурсников и старшекурсников. Правда, проведенная затем 26 ноября Рыбинским государственным авиационным техническим университетом Всероссийская олимпиада для студентов 1-го курса всех специальностей

не подтвердила опасения относительно большой разницы в подготовке математиков и нематематиков (математики ЯргУ им. П.Г. Демидова выступили не лучше студентов ЯГТУ) [11]. Но пока будем считать, что это частный случай, касающийся первокурсников.

### Задачи и примеры решений

1. Найти все верхнетреугольные матрицы второго порядка

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

2022-я степень которых является единичной матрицей.

◀ По индукции получаем, что при  $n \geq 2$

$$X^n = \begin{pmatrix} a^n & (a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + c^{n-1})b \\ 0 & c^n \end{pmatrix}.$$

Поэтому равенство  $X^{2022} = E$  равносильно системе уравнений  $a = 1$  или  $a = -1$ ,  $c = 1$ , или  $c = -1$ ,  $(a^{2021} + a^{2020}c + \dots + c^{2021})b = 0$ .

Если  $b = 0$ , то  $X = \pm E$  или  $X = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \mp 1 \end{pmatrix}$ .

Если  $b \neq 0$ , то для  $z = a/c$  получаем уравнение  $z^{2021} + z^{2020} + \dots + z + 1 = 0$ , имеющее единственное действительное решение

$z = -1$ . Следовательно,  $X = \begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \mp 1 \end{pmatrix}$ .

Ответ.  $X = \pm E$  и  $X = \begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \mp 1 \end{pmatrix}$  при любом  $b \in \mathbb{R}$ . ▶

2. Пусть  $\vec{a}$  – заданный ненулевой вектор в пространстве. Найти все векторы  $\vec{x}$ , такие, что  $\vec{x} \times (\vec{a} \times \vec{x}) + \vec{a} \times (\vec{x} \times \vec{a}) = \vec{0}$ .

◀ Перепишем уравнение в виде  $(\vec{x} - \vec{a}) \times (\vec{a} \times \vec{x}) = \vec{0}$ . При любом  $k \in \mathbb{R}$   $\vec{x} = k\vec{a}$  – решение уравнения, поскольку тогда  $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{0}$ . Если  $\vec{x} \neq k\vec{a}$ , то векторы  $\vec{x} - \vec{a}$  и  $\vec{a} \times \vec{x}$  ненулевые и взаимно ортогональные. Поэтому  $(\vec{x} - \vec{a}) \times (\vec{a} \times \vec{x}) \neq \vec{0}$ . ▶

Ответ.  $\vec{x} = k\vec{a}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

3. При каком значении параметра  $a$  прямые, заданные каноническими уравнениями

$$\frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{a} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z}{3},$$

пересекаются? Найти точку пересечения.

◀ Прямые пересекаются, если совместна система уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{a}, \\ \frac{x-1}{1} = \frac{z}{3}, y+2=0. \end{cases}$$

Она равносильна системе

$$\begin{cases} y = -2, & x = -1, \\ z = -a, & z = -6, \end{cases}$$

которая совместна только при  $a = 6$ , а ее решение  $x = -1, y = 2, z = -6$ . ▶

Ответ. Прямые пересекаются при  $a = 6$  в точке  $(-1, 2, -6)$ .

4. Найти все корни уравнения  $3^x - 6x + 3 = 0$ .

◀ Очевидно, что  $x = 1$  и  $x = 2$  – корни. Для функции  $f(x) = 3^x - 6x + 3$  имеем  $f'(x) = 3^x \ln 3 - 6$ . Так как  $f''(x) = 3^x \ln^2 3 > 0$ , то  $f'(x)$  – возрастающая функция. Учитывая неравенства  $f'(1) = 3 \ln 3 - 6 < 0$ ,  $f'(2) = 9 \ln 3 - 6 > 0$ , получаем, что существует такая точка  $c \in (1, 2)$ , что при  $x \in (-\infty, c)$   $f'(x) < 0$ , а при  $x \in (c, \infty)$   $f'(x) > 0$ . Поэтому  $x = 1$  – единственный нуль  $f(x)$  на  $(-\infty, c)$ , а  $x = 2$  – единственный нуль  $f(x)$  на  $(c, \infty)$ . Таким образом,  $x = 1$  и  $x = 2$  – все корни уравнения. ▶

Ответ.  $x = 1$  и  $x = 2$ .

5. Найти предел  $\lim_{x \rightarrow +0} (1 - x^x)^x$ .

$$\leftarrow \lim_{x \rightarrow +0} (1 - x^x)^x = \lim_{x \rightarrow +0} \exp(x \ln(1 - x^x)) = \exp \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1 - e^{x \ln x})}{1/x}.$$

Так как при  $x \rightarrow +0$  имеем  $x \ln x \rightarrow -0$ , и потому  $1 - e^{x \ln x} \rightarrow +0$ , то имеем неопределенность  $\frac{\infty}{\infty}$ . Используя правило Лопиталя и стандартные эквивалентности, получаем

$$\lim_{x \rightarrow +0} (1 - x^x)^x = \exp \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-e^{x \ln x} (\ln x + 1)}{(-1/x^2)(1 - e^{x \ln x})} = \|e^{x \ln x} \rightarrow 1, e^{x \ln x} - 1 \sim x \ln x\| =$$



$$= \exp \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2(\ln x + 1)}{-x \ln x} = \exp \lim_{x \rightarrow +0} \left( -x \left( 1 + \frac{1}{\ln x} \right) \right) = \exp 0 = 1. \blacktriangleright$$

Ответ. 1.

6. Найти все дифференцируемые функции  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , такие, что  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(1+2x) - 2f'(1-2x) = x$ .

◀ Заменяем  $x$  на  $-x$ :  $f'(1-2x) - 2f'(1+2x) = -x$ . Из двух уравнений получаем следствие:

$$f'(1+2x) = x/3, \quad f'(x) = (x-1)/6, \quad f(x) = (x-1)^2/12 + c.$$

Проверкой убеждаемся, что  $f(x) = (x-1)^2/12 + c$  — действительно решение. ▶

Ответ.  $f(x) = (x-1)^2/12 + c$  при любом  $c \in \mathbb{R}$ .

7. При каких значениях параметров  $p \in [-1, 1]$  и  $q \in [-1, 1]$  квадратное уравнение  $z^2 + pz + q = 0$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , имеет корень с наибольшим модулем?

◀ Если  $p^2 - 4q < 0$ , то корни комплексные:  $z_{1,2} = \frac{-p \pm i\sqrt{4q - p^2}}{2}$ . Их модули  $|z_{1,2}| = \sqrt{q}$  принимают наибольшее значение 1 при  $q = 1$ .

$$\text{Действительные корни } x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \text{ и } x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

имеются в случае  $p^2 - 4q \geq 0$ . При этом  $x_1 \geq x_2$ . При постоянном  $q$  наибольшее значение  $x_1$  достигается для  $p = -1$ . Если  $p = -1$ , то наибольшее

значение  $x_1$  достигается при  $q = -1$ . Оно равно  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . Аналогично,  $x_2$

принимает наименьшее значение  $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$  при  $p = 1, q = -1$ . Таким обра-

зом, уравнение имеет корень с наибольшим модулем, равным  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , при

$p = 1, q = -1$  и при  $p = q = -1$ . ▶

Ответ. При  $p = 1, q = -1$  и при  $p = q = -1$ .

8. Пусть непрерывная функция  $f(x)$ ,  $x \in [a, b]$  такова, что

$\int_a^b x^n f(x) dx = 0$  при всех целых  $n = 0, 1, \dots, N$ . Показать, что  $f(x)$  имеет на отрезке  $[a, b]$  по меньшей мере  $N + 1$  нуль.

◀ Для любого многочлена  $P_r(x)$  степени  $r \leq N$  имеем равенство

$\int_a^b P_r(x) f(x) dx = 0$ . Предположим, что  $f(x)$  имеет на отрезке  $[a, b]$   $m \leq N$

нулей. Пусть  $x_1 < x_2 < \dots < x_r$  – нули принадлежащие  $(a, b)$ , в которых

$f(x)$  меняет знак. Возьмем  $P_r(x) = s(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_r)$ , где  $s = 1$

или  $s = -1$  выбрано так, что  $\operatorname{sgn} P_r(x) = \operatorname{sgn} f(x)$  в точках  $x \in [a, b]$ . Тогда

$P_r(x) f(x) > 0$  во всех точках отрезка  $[a, b]$ , отличных от нулей функции

$f(x)$ , и потому  $\int_a^b P_r(x) f(x) dx > 0$ . Получили противоречие. Тем самым,

$f(x)$  имеет на отрезке  $[a, b]$  больше, чем  $N$  нулей. ▶

9. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_x^{1/x} \cos \pi t^2 dt$ .

**Решение 1.** ◀ По теореме о среднем

$$f(x) = \int_x^{1/x} \cos \pi t^2 dt = \left( \frac{1}{x} - x \right) \cos \pi c^2(x) = \frac{1-x^2}{x} \cos \pi c^2(x),$$

где  $c(x)$  находится между  $x$  и  $1/x$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow 1} c(x) = 1$  и

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_x^{1/x} \cos \pi t^2 dt = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x}{x} \cos \pi c^2(x) = -2 \cos \pi = 2. \blacktriangleright$$

**Решение 2.** ◀ Для функции  $f(x) = \int_x^{1/x} \cos \pi t^2 dt$  получаем оценку

$$|f(x)| \leq \int_x^{1/x} |\cos \pi t^2| dt \leq \left| \int_x^{1/x} dt \right| = \left| \frac{1}{x} - x \right|.$$

Поэтому  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$  и можно применять правило Лопиталья:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_x^{1/x} \cos \pi t^2 dt = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \int_x^{1/x} \cos \pi t^2 dt \right)' = \lim_{x \rightarrow 1} \left( -\frac{1}{x^2} \cos \frac{\pi}{x^2} - \cos \pi x^2 \right) = 2. \blacktriangleright$$

10. Вычислить  $\int_0^{\infty} \frac{x^2 - a^2}{x^4 + a^4} dx$  ( $a \neq 0$ ).

◀ Так как  $\frac{x^2 - a^2}{x^4 + a^4} : \frac{1}{x^2}$  при  $x \rightarrow \infty$ , а интеграл  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$  сходится, то сходится интеграл  $\int_1^{\infty} \frac{x^2 - a^2}{x^4 + a^4} dx$ , а потому и интеграл  $\int_0^{\infty} \frac{x^2 - a^2}{x^4 + a^4} dx$ .

Делаем замену  $x \mapsto ax$ :  $\int_0^{\infty} \frac{x^2 - a^2}{x^4 + a^4} dx = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx$ .

Так как  $\int_0^{\infty} \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx = \left\| x \mapsto \frac{1}{x} \right\| = \int_0^{\infty} \frac{1/x^2 - 1}{1/x^4 + 1} \cdot \frac{dx}{x^2} = - \int_0^{\infty} \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx$ ,

то  $\int_0^{\infty} \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx = 0$ , а потому и  $\int_0^{\infty} \frac{x^2 - a^2}{x^4 + a^4} dx = 0$ .

11. Доказать, что множество комплексных чисел  $z$ , удовлетворяющих уравнению  $|z^2 - z| = 1$ , является замкнутой кривой, задаваемой уравнением  $z = f(\varphi)e^{i\varphi}$ , где  $f(\varphi)$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$ , — действительная непрерывная положительная  $2\pi$ -периодическая функция.

◀ Пусть  $z = \rho e^{i\varphi}$ . Тогда  $|\rho^2 e^{i2\varphi} - \rho e^{i\varphi}| = 1$ ,  $|e^{i\varphi} \cdot |\rho^2 e^{i\varphi} - \rho|| = 1$ ,  $|\rho^2 e^{i\varphi} - \rho| = 1$ ,  $|\rho^2 \cos \varphi - \rho + i\rho^2 \sin \varphi|^2 = 1$ ,  $\rho^4 - 2\rho^3 \cos \varphi + \rho^2 = 1$ .

Перепишем последнее равенство в виде  $g(\rho) = \cos \varphi$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$ , где  $g(\rho) = \frac{1}{2} \left( \rho + \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^3} \right)$ . Так как  $\forall \rho > 0$   $g'(\rho) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4} \right) = \frac{\rho^4 - \rho^2 + 3}{2\rho^4} > 0$ , а  $E(g) = \mathbb{R}$ , то функция  $g$  имеет непрерывную обратную функцию  $q = g^{-1}$ , определенную на всей числовой прямой  $\mathbb{R}$ . Поэтому уравнение  $g(\rho) = \cos \varphi$  можно записать в виде  $\rho = q(\cos \varphi)$  или  $\rho = f(\varphi)$ , где  $f(\varphi) = q(\cos \varphi)$ . Поэтому  $z = f(\varphi)e^{i\varphi}$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$ . ▶

12. Доказать, что для любого  $x \in (0, \infty)$  интеграл  $\int_x^{+\infty} \sin t^2 dt$  сходится и  $\left| \int_x^{+\infty} \sin t^2 dt \right| \leq \frac{1}{x}$ .

◀ Сделаем замену  $t^2 = s$  :

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} \sin t^2 dt &= \int_{x^2}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{s}} \sin s ds = \int_{x^2}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{s}} d(-\cos s) = \left\| \text{интегрируем по частям} \right\| = \\ &= -\frac{\cos s}{2\sqrt{s}} \Big|_{x^2}^{\infty} - \int_{x^2}^{+\infty} \frac{\cos s}{4\sqrt{s^3}} ds = \frac{\cos x^2}{2x} - \int_{x^2}^{+\infty} \frac{\cos s}{4\sqrt{s^3}} ds . \end{aligned}$$

Так как  $\left| \frac{\cos s}{4\sqrt{s^3}} \right| \leq \frac{1}{4\sqrt{s^3}}$ , а интеграл  $\int_{x^2}^{+\infty} \frac{1}{4\sqrt{s^3}} ds$  сходится, то сходится

и интеграл  $\int_{x^2}^{+\infty} \frac{\cos s}{4\sqrt{s^3}} ds$ , а потому и интеграл  $\int_x^{+\infty} \sin t^2 dt$ .

Так как

$$\left| \frac{\cos x^2}{2x} \right| \leq \frac{1}{2x}, \quad \left| \int_{x^2}^{+\infty} \frac{\cos s}{4\sqrt{s^3}} ds \right| \leq \int_{x^2}^{+\infty} \frac{1}{4\sqrt{s^3}} ds = -\frac{1}{2\sqrt{s}} \Big|_{x^2}^{\infty} = \frac{1}{2x},$$

то  $\left| \int_x^{+\infty} \sin t^2 dt \right| \leq \frac{1}{x}$ . ▶

13. Найти сумму ряда  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - n}{2^n}$ .

◀ При  $0 < x < 1$

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - n)x^n &= x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = x^2 \sum_{n=2}^{\infty} (x^n)^n = x^2 \left( \sum_{n=2}^{\infty} x^n \right)' = \\ &= x^2 \left( \frac{x^2}{1-x} \right)' = x^2 \left( \frac{2x - x^2}{(1-x)^2} \right)' = \frac{2x^2}{(1-x)^3} . \end{aligned}$$

При  $x = 1/2$  получаем  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - n}{2^n} = \frac{2x^2}{(1-x)^3} \Big|_{x=1/2} = 4$ . ▶

Ответ. 4.

14. Найти все непрерывные функции  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , такие что

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \int_{-x}^x f(t) dt . \quad (*)$$

◀ Если  $f$  – искомая функция, то она бесконечно дифференцируема, а ее производная нечетна:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(-x) = \int_x^{-x} f(t)dt = - \int_{-x}^x f(t)dt = -f'(x).$$

Интегрируя это тождество, получаем

$$\int f'(-x)d(-x) = \int f'(x)dx, \quad f(-x) = f(x) + a,$$

где  $a$  – постоянная. При  $x=0$  имеем  $f(0) = f(0) + a$ , то есть  $a=0$  и  $f$  – четная функция.

Дифференцируя тождество (\*), получаем  $f''(x) = f'(x) + f'(-x)$ , а потому  $f''(x) = 2f'(x)$ . Из этого линейного дифференциального уравнения находим

$$f(x) = C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}}.$$

Подставляя это выражение для  $f(x)$  в (\*), получаем  $C_1 = C_2 = C/2$ . ►

Ответ.  $f(x) = C \operatorname{ch}\sqrt{2}x = C \frac{e^{x\sqrt{2}} + e^{-x\sqrt{2}}}{2}$ .

**15.** Найти все решения  $y(x)$ ,  $x \in (0, \infty)$ , дифференциального уравнения  $y'' + \frac{2}{x}y' + 2y = 0$ , для которых  $\lim_{x \rightarrow +0} y(x) = 1$ .

◀ Запишем уравнение в виде ОЛДУ для функции  $xy(x)$ :

$$(xy'' + 2y') + 2xy = 0, \quad (xy)'' + 2xy = 0.$$

Его общее решение  $xy = C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x$ . Следовательно,  $y = (C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x)/x$  – общее решение заданного уравнения.

Условие  $\lim_{x \rightarrow +0} y(x) = 1$  выполняется только при  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 1/\sqrt{2}$ , то есть искомое решение единственное:  $y(x) = \sin \sqrt{2}x / \sqrt{2}x$ ,  $x \in (0, \infty)$ . ►

Ответ.  $y(x) = \sin \sqrt{2}x / \sqrt{2}x$ ,  $x \in (0, \infty)$ .

### Распределение задач по курсам

Студенты 2-го курса решали задачи с 1 по 10.

Студентам старших курсов было предложено 10 задач в следующем порядке: 1, 2, 11, 3, 8, 10, 12, 13, 14, 15.

Итоги олимпиады и перспективы развития студенческого математического олимпиадного движения рассмотрены в статье [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Оленикова Ю.К.* Анализ результатов Всероссийской студенческой олимпиады по математике 2022 года / Ю.К. Оленикова, В.Ш. Ройтенберг // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 18. Ярославль, Изд-во ЯГТУ, 2023. С. 86-92.
2. *Ройтенберг В.Ш.* Задачи студенческих математических олимпиад ЯГТУ: учебное пособие. / В.Ш. Ройтенберг, Ю.К. Оленикова, Л.А. Сидорова. 2-е изд., испр. и доп. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2015. 151 с.
3. *Ройтенберг В.Ш.* О задачах Ярославской межрегиональной студенческой математической олимпиады 2015 года / В.Ш. Ройтенберг, Ю.К. Оленикова // Актуальные вопросы преподавания математики в образовательной организации высшего образования: материалы Всерос. очно-заоч. науч.-метод. конф. с междунар. участием. Кострома: Изд-во ВА ВРХБЗ и ИВ, 2016. С. 21-28.
4. *Ройтенберг В.Ш.* О задачах всероссийской студенческой олимпиады 2016 года в Ярославле / В.Ш. Ройтенберг, Ю.К. Оленикова // Актуальные вопросы преподавания математики в образовательной организации высшего образования: материалы Всерос. очно-заоч. науч.-метод. конф. с междунар. участием. Кострома: Изд-во ВА ВРХБЗ и ИВ, 2017. С. 24–31.
5. *Ройтенберг В.Ш.* Всероссийская и VIII международная студенческие олимпиады по математике в Ярославле / В.Ш. Ройтенберг, Ю.К. Оленикова // Математика и ее приложения: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 6. СПб.: Изд-во ГУ МРФ, 2018. С. 104–111.
6. *Оленикова Ю.К.* О ярославских студенческих математических олимпиадах 2018 года / Ю.К. Оленикова, В.Ш. Ройтенберг // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 14. Ярославль, 2019. С. 99–109.
7. *Ройтенберг В.Ш.* О задачах межрегиональной студенческой математической олимпиады (Ярославль-2019) // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 15. Ярославль, 2020. С. 122-132.
8. *Оленикова Ю.К.* Анализ итогов межрегиональной студенческой олимпиады по математике // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 15. Ярославль, 2020. С. 110-117.
9. *Оленикова Ю.К.* Опыт проведения студенческой онлайн-олимпиады по математике / Ю.К. Оленикова, В.Ш. Ройтенберг // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 17. Ярославль, Изд-во ЯГТУ. 2022. С. 81-87.
10. *Оленикова Ю.К.* Задания и итоги Всероссийской студенческой олимпиады по математике 2021 года / Ю.К. Оленикова, В.Ш. Ройтенберг // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 17. Ярославль, Изд-во ЯГТУ, 2022. С. 88-95.
11. *Березина Л.В.* Анализ результатов решения задач Всероссийской студенческой олимпиады по математике, проведенной РГАТУ имени П.А. Соловьева / Л.В. Березина, А.В. Васильева, А.И. Бурцев // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 18. Ярославль, Изд-во ЯГТУ. 2023. С. 52-57.

УДК 517

**М. В. Ушенин, М. Н. Романова**

Ярославский государственный технический университет  
Россия, г. Ярославль, e-mail: usheninmv50@gmail.com,  
9066356788@mail.ru

## **ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ РЯДОВ В ЗАДАЧАХ ВЫЧИСЛЕНИЯ СУММЫ СТЕПЕННОГО РЯДА**

*Рассматривается применение свойств равномерно сходящихся рядов в задачах вычисления суммы степенного ряда.*

**Ключевые слова:** *сумма степенного ряда, область сходимости, дифференцирование и интегрирование степенных рядов*

**M. V. Ushenin, M. N. Romanova**

Yaroslavl State Technical University  
Russia, Yaroslavl, e-mail: usheninmv50@gmail.com,  
9066356788@mail.ru

## **DIFFERENTIATION AND INTEGRATION OF SERIES IN PROBLEMS OF CALCULATING THE SUM OF A POWER SERIES**

*The application of the properties of uniformly converging series in the problems of calculating the sum of a power series is considered.*

**Keywords:** *sum of power series, convergence set, differentiation and integration of power series*

Изучение темы «Приложения степенных рядов» сводится на практике к решению следующих типов задач:

- определение области сходимости ряда;
- вычисление определенных интегралов;
- решение дифференциальных уравнений для заданных начальных условий;
- представление функций в виде степенного ряда;
- нахождение суммы заданного ряда.

В структуре традиционного курса высшей математики основное внимание уделяется задачам с первой по четвертую [1–3] и лишь редкие издания рассматривают задачу о сумме степенного ряда [4]. А решение именно этой задачи вызывает у студентов наибольшие затруднения, так как оно связано, как правило, с поиском нестандартных путей и требует

применения не всегда достаточно хорошо отработанных технических приемов таких, как почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов. Негативный вклад в ситуацию вносит и хронический недостаток времени, выделяемого на освоение курса.

Алгоритм решения данной задачи обычно включает следующие пункты:

1. Определение области сходимости исходного ряда;
2. Выбор известного разложения какого-либо «стандартного» ряда;
3. Преобразование исходного ряда к известному разложению с помощью следующих операций:
  - умножение и деление ряда на одну и ту же величину;
  - вынесение за скобки общего множителя ряда;
  - прибавление к ряду и вычитание одной и той же величины;
  - представление ряда в виде суммы более простых рядов – слагаемых;
  - почленное дифференцирование и последующее интегрирование суммы ряда, либо, наоборот, почленное интегрирование с последующим дифференцированием суммы полученного ряда;
4. Уточнение суммы ряда в «проблемных» точках;
5. Проверка результата разложением полученной суммы ряда  $S(x)$  в степенной ряд.

Авторы данной статьи предлагают на представленных ниже простейших примерах проиллюстрировать все пункты приведенного алгоритма и «трудные» места в решении таких задач.

**Пример 1.** Найти сумму ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ .

**Решение.** Область сходимости исходного ряда очевидна – интервал  $(-1;1)$ .

Одним из «трудных» мест обычно является выбор известного разложения. Вот и здесь полученное выражение на табличные разложения не похоже, значит, необходимы преобразования.

Сначала приведем в соответствие степени переменной и знаменатели дробей. Для этого умножим и разделим ряд на  $x$ , полагая  $x \neq 0$ . Получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} = \frac{x}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Полученный ряд можно почленно дифференцировать в интервале  $(-1;1)$  его сходимости:

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right)' = \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \right)' = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{2n} + \dots = 1 + x^2 + (x^2)^2 + (x^2)^3 + \dots + (x^2)^n + \dots$$



Получили сумму геометрического ряда со знаменателем  $q = x^2$ , равную

$$\frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-x^2}. \text{ Итак, } \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right)' = \frac{1}{1-x^2} \text{ при всех } x \in (-1;1). \text{ Интегрируя}$$

это тождество, получаем при всех  $x \in (-1;1)$ .

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right)' dx = \int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|.$$

Умножая на  $\frac{1}{x}$ , находим сумму  $S(x)$  исходного ряда при

$$x \in (-1;0) \cup (0;1): S(x) = \frac{1}{2x} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|.$$

Учитывая что  $S(0) = 1$ , получаем окончательно

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|, & x \in (-1;0) \cup (0;1), \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

**Пример 2.** Найти сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+3}}{n!(n+3)}.$$

**Решение.** Область сходимости ряда – вся числовая прямая  $\mathbb{R}$ . Сначала упрощаем исходный ряд, дифференцируя его почленно:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+3}}{n!(n+3)} \right)' &= \left( \frac{x^3}{0! \cdot 3} - \frac{x^4}{1! \cdot 4} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^6}{3! \cdot 6} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+3}}{n!(n+3)} + \dots \right)' \\ &= \left( \frac{x^2}{0!} - \frac{x^3}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^5}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+2}}{n!} = \dots \right). \end{aligned}$$

Далее выносим за знак суммы  $x^2$  и поднимаем «минусы» в числитель. Получаем

$$x^2 \left( 1 + \frac{-x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{-x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots \right).$$

Осталось убрать или добавить знаки «минус», воспользовавшись свойствами степеней:

$$-x^{2n-1} = (-x)^{2n-1}, \quad x^{2n} = (-x)^{2n}.$$

Мы получили в скобках разложение в степенной ряд функции  $e^{-x}$ , то есть

$$S'(x) = x^2 \left( 1 + \frac{(-x)}{1!} + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{(-x)^n}{n!} + \dots \right) = x^2 e^{-x}.$$

Интегрируя  $S'(x)$  и учитывая, что  $S(0) = 0$ , находим сумму исходного ряда:

$$S(x) = \int_0^x S'(x) dx + S(0) = \int_0^x x^2 e^{-x} dx.$$

Вычисляем интеграл в правой части «по частям» и получаем

$$S(x) = -(x+1)^2 e^{-x} + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

В приведенных выше примерах сначала выполнялась операция почленного дифференцирования ряда и находилась производная от суммы ряда  $S'(x)$ . Затем интегрированием находилась сумма ряда

$$S(x) = \int_0^x S'(x) dx + S(0).$$

Применяется и обратная последовательность действий: сначала осуществляется почленное интегрирование ряда и находится сумма полученного ряда, из которой последующим дифференцированием получается сумма исходного ряда.

**Пример 3.** Найти сумму ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} (2n-1)x^{2n}$ .

**Решение.** Ряд сходится на интервале  $(-1; 1)$ .

Представим исходный ряд в виде разности двух рядов:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n-1)x^{2n} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} nx^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}.$$

Вычислим сумму  $S_1(x)$  ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} nx^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n}$ . Для этого вынесем

за знак суммы множитель  $x$ :  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n} = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1}$  и проинтегрируем ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1}$  почленно:

$$\int_0^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^x nx^{2n-1} dx \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{x^{2n}}{2n} \Big|_0^x = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-x^2}, \quad x \in (-1; 1).$$

Дифференцируя полученное тождество, находим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1} = \left( \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \right)' = \left( \frac{1}{2(1-x^2)} \right)' = \frac{x}{(1-x^2)^2}.$$

Умножая на  $x$ , получаем  $S_1(x) = \frac{x^2}{(1-x^2)^2}$ .

Так как  $S_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$ , то сумма исходного ряда

$$S(x) = 2S_1(x) - S_2(x) = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} - \frac{1}{1-x^2} = \frac{3x^2 - 1}{(1-x^2)^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

В некоторых случаях операции почленного дифференцирования и интегрирования рядов приходится производить дважды. Учитывая, что техническая сторона процессов дифференцирования и интегрирования в подобных задачах сложности не представляет, особое внимание нужно уделить вопросам выбора табличного ряда и вычисления суммы ряда в «проблемных» точках (см. пример 1).

Опыт, полученный студентами в процессе работы над данной темой переоценить трудно. Расширяя и углубляя знания по теме «Ряды», он в то же время создает базу для изучения других наук. Достаточно привести пример вычисления числовых характеристик (математического ожидания и дисперсии) геометрического распределения в курсе теории вероятностей [5]. Авторы надеются, что этот опыт будет полезен студентам самых разных специальностей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики. В 2 т. Т. 2. М.: Наука, 1974. 655 с.
2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: Учеб. для студентов физико-математических и инженерно-физических специальностей вузов: в 3 т. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. шк., 1988. 576 с.
3. Бугров Я.С. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. М.: Наука. Гл. редакция физ.-мат. лит-ры, 1981. 448 с.
4. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа: Учеб. пособие для втузов / В.А. Болгов, А.В. Ефимов, А.Ф. Каракулин [и др.]; под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. 2-е изд. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 368 с.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов. 4-е изд., стер. М.: Высш. шк., 1998. 400 с.

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 330.4

**Е. Ю. Лискина, С. А. Попель**

Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина,  
Россия, г. Рязань, e-mail: katelis@yandex.ru, SAPopel@mail.ru

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОДНОСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИКИ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

*Рассмотрена динамическая модель односекторной экономики с дискретным временем как система взаимозависимых эконометрических уравнений. На основе статистических данных выполнена идентификация параметров модели, проведен статистический анализ качества полученных уравнений. Сделан прогноз ключевых параметров модели.*

**Ключевые слова:** разностные уравнения, динамические модели, модель односекторной экономики, идентифицируемость, регрессия

**E. Y. Liskina, S. A. Popel**

S.A. Esenin Ryazan State University,  
Russia, Ryazan, e-mail: katelis@yandex.ru, SAPopel@mail.ru

## IDENTIFICATION OF PARAMETERS OF A DYNAMIC MODEL OF A SINGLE-SECTOR ECONOMY WITH DISCRETE TIME

*A dynamic model of a single-sector economy with discrete time is considered as a system of interdependent econometric equations. The identification of model parameters was carried out, a statistical analysis of the quality of the obtained equations was carried out. The forecast of the key parameters of the model is made.*

**Keywords:** difference equations, dynamic models, single-sector economy model, identifiability, regression

**Введение.** Прогнозирование ключевых показателей экономики региона является важной управленческой задачей. В настоящее время существует два подхода к её решению. Первый подход основан на исследовании и анализе малосекторных моделей экономического роста [1, 3, 4, 8] и

моделировании возможных сценариев развития при всевозможных значениях коэффициентов модели; второй – на построении многофакторных эконометрических моделей на основе статистических данных [2, 9, 11] с последующим прогнозированием на основе идентифицированных параметров этих моделей. Но исследований, соединяющих оба подхода, в настоящее время достаточно мало.

В исследованиях [4, 11] выявлена проблема депрессивного состояния Рязанской области с точки зрения уровня рабочей силы, что в свою очередь влияет на величину валового регионального продукта (ВРП) и состояние производящих отраслей экономики. Однако в работе [4] предложена модель замкнутой экономики региона. В реальности таких экономик не существует. Поэтому представляется актуальным построить и исследовать односекторную модель открытой экономики с коэффициентами, идентифицированными на основе статистических данных.

В данной работе на основе статистических данных по Рязанской области идентифицирована новая односекторная модель открытой экономики типа Солоу с дискретным временем, учитывающая конкуренцию за ресурс рабочих мест, внешние инвестиции и миграцию экономически активного населения. Обоснование и построение модели дано в работе [5]. Цель работы состоит в прогнозировании стоимости основных фондов и численности рабочей силы по идентифицированной модели.

**Описание модели.** В работе [5] была предложена односекторная динамическая модель экономики с дискретным временем

$$\begin{cases} K_t = (1 - \mu)K_{t-1} + \alpha X_{t-1} + \gamma S_{t-1}, \\ L_t = (1 + \nu)L_{t-1} - \frac{\nu}{M}L_{t-1}^2 + \beta Q_{t-1}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $K_t$ ,  $K_{t-1}$  – величины основных фондов в текущий и в предыдущий периоды;  $X_{t-1}$  – валовой региональный продукт (ВРП) региона  $L_t$ ,  $L_{t-1}$  – численности рабочей силы в текущий и в предыдущий периоды;  $Q_{t-1}$  – объем миграции в предыдущий период;  $S_{t-1}$  – сальдо внешних инвестиций и налоговых отчислений, покинувших регион;  $M$  – «ёмкость» региона;  $\mu$  – норма амортизации;  $\alpha$  – доля ВРП, идущая на расширение производства;  $\nu$  – темп роста населения;  $\beta$  – темп прироста миграции;  $\gamma$  – доля инвестиций, идущая на расширение производства. Система (1) представляет собой систему взаимозависимых эконометрических уравнений. В [5] установлено, что для неё выполняются необходимые и достаточные условия идентифицируемости [10]. Дальнейшие вычисления проводились с использованием надстройки «Анализ данных» табличного процессора MS Excel на уровне значимости 0,05.

**Идентификация параметров модели.** Для идентификации параметров модели (1) были собраны статистические данные [7] по Рязанской области за период с 2000 по 2021 год. Спецификация зависимостей показала наличие линейной связи между  $K_t$  и  $K_{t-1}$ ,  $K_t$  и  $X_{t-1}$ ,  $K_t$  и  $S_{t-2}$ ,  $L_t$  и  $L_{t-1}$ .

В результате идентификации коэффициентов системы (1) и отбора уравнений с наилучшими параметрами система (1) приняла вид

$$\begin{cases} K_t = 0,5904K_{t-1} + 2,8068X_{t-1} - 9,2512S_{t-2}, \\ L_t = 0,9919L_{t-1}. \end{cases} \quad (2)$$

Оказалось, что статистически значимая конкуренция за ресурс рабочих мест отсутствует; объем миграции также не оказывает статистически значимого влияния на численность рабочей силы. Статистические характеристики первого уравнения системы (2) представлены в таблице 1, а второго – таблице 2 (в скобках указаны критические значения соответствующих статистических критериев).

**Таблица 1. Статистические характеристики уравнения для  $K_t$**

Характеристики уравнения в целом				
$R^2$	$A$	Стандартная ошибка	$F$ -статистика	$P$ -значение
0,9594	0,15	209717,07	126,10	$7,3 \cdot 10^{-11}$
Характеристики коэффициентов				
Коэффициент	Значение	Стандартная ошибка	$t$ -статистика	$P$ -значение
$(1 - \mu)$	0,5904	0,2144	2,753	0,0141
$\alpha$	2,8068	0,9253	3,0332	0,0079
$\gamma$	-9,2512	4,1347	-2,2374	0,0398
Условия Гаусса – Маркова				
Гипотеза о нормальном распределении остатков (критерий Харке – Бера)	Гипотеза об отсутствии корреляции в остатках (критерий Стьюдента)	Гипотеза о постоянстве дисперсии остатков (G-критерий Кохрана [6])	Гипотеза $M(e_t) = 0$	Гипотеза о независимости остатков и наблюдений $r(e_t, x_j) = 0$ (критерий Стьюдента)
32,4321 (5,9915) отвергается	$r_{e_i e_j} = -0,0882$ -0,3543 (2,1199) принимается	0,6416 (0,407) отвергается	2,5832 (2,1009) отвергается	-0,3489; 1,6312; 0,2016 (2,1098) принимается

**Таблица 2. Статистические характеристики уравнения для  $L_t$**

Характеристики уравнения в целом				
$R^2$	$A$	Стандартная ошибка	$F$ -статистика	$P$ -значение
0,9991	0,02	17,7190	20465,4518	$5,8 \cdot 10^{-29}$
Характеристики коэффициентов				
Коэффициент	Значение	Стандартная ошибка	$t$ -статистика	$P$ -значение
$(1 + \nu)$	0,9919	0,0069	143,0575	$2,8 \cdot 10^{-30}$
Условия Гаусса – Маркова				
Гипотеза о нормальном распределении остатков (критерий Харке – Бера)	Гипотеза об отсутствии корреляции в остатках (критерий Стьюдента)	Гипотеза о постоянстве дисперсии остатков (критерий Кохрана [6])	Гипотеза $M(e_i) = 0$	Гипотеза о независимости остатков и наблюдений $r(e_i, x_j) = 0$ (критерий Стьюдента)
1,1913 (5,9915) принимается	$r_{e_i e_j} = -0,7386$ $-4,5180$ (2,1199) отвергается	0,4439 (0,407) отвергается	0,2188 (2,1009) принимается	1,7429 (2,1098) принимается

Из таблицы 1 следует, что при достаточно хорошем качестве идентификации уравнений системы (2) некоторые условия теоремы Гаусса – Маркова не выполняются. Для первого уравнения системы (2) нарушение гипотез о нормальном распределении остатков, постоянстве дисперсии остатков и равенстве нулю математического ожидания остатков в совокупности может указывать на наличие неучтенных значимых факторов, влияющих на переменную  $K_t$ . Для второго уравнения системы (2) нарушаются гипотеза об отсутствии корреляции в остатках и постоянстве дисперсии остатков, что говорит о гетероскедастичности данных  $L_t$  и  $L_{t-1}$ .

**Прогнозирование значений ключевых факторов.** Выполним прогноз по построенной модели с идентифицированными коэффициентами. Прогнозное значение параметра  $K_t$  на 2021 год составило

$$\tilde{K}_{2021} = 2554125 \pm 123066 \text{ млн руб.},$$

реальное значение  $\tilde{K}_{2021} = 2408427$  млн руб. [7]. Несколько завышенную оценку прогноза можно объяснить внешними неучтенными факторами.

Прогнозное значение параметра  $L_t$  на 2021 год составило

$$\tilde{L}_{2021} = 512,53 \pm 2,58 \text{ тыс. чел.},$$

реальное значение  $\tilde{L}_{2021} = 514,5$  тыс. чел. [7], данное значение попадает в доверительный интервал, то есть прогноз оказался достаточно точным.

**Заключение.** Из проведённого анализа можно сделать следующие выводы.

1. В первом уравнении сальдо инвестиций и налогов оказывает резкое отрицательное воздействие на уровень основных фондов, т.е. поступающие в регион внешние инвестиции не компенсируют потери из-за значительных налоговых отчислений в федеральный бюджет.

2. Регион способен содержать в себе значительно большее число людей, чем он содержит на данный момент, следовательно, снижение численности происходит не из-за насыщенности региона рабочей силой.

3. Статистическая незначимость миграции показывает, что в Рязанской области рынок рабочей силы формируется в основном за счет местного населения.

4. Численность рабочей силы неуклонно убывает вследствие естественного процесса убыли населения в развитых странах, следовательно, актуальным становится вопрос о повышении привлекательности и конкурентоспособности регионального образования с целью сохранения в регионе будущих специалистов. При этом важно расширять спектр предлагаемых программ, основываясь на потребностях рынка труда.

Таким образом, экономику Рязанской области можно укрепить за счёт привлечения новых внешних инвестиций, увеличения доли рязанских компаний на региональном рынке, а также за счёт снижения потерь профессионалов и молодых специалистов путём повышения конкурентоспособности регионального высшего и среднего профессионального образования.

С математической точки зрения модель требует улучшения. В частности, требуется найти и включить в модель факторы, оказывающие значимое влияние на величину  $K_t$ , и улучшить спецификацию второго уравнения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов В.В.* Качественное исследование модели односекторной экономики // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2007. № 12. С. 11–15.
2. *Вакуленко Е.С.* Мотивы внутренней миграции населения в России: что изменилось в последние годы? // Прикладная эконометрика. 2019. № 55. С. 113–138. DOI: 10.24411/1993-7601-2019-10013



3. *Колемаев В.А.* Математическая экономика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. 399 с.
4. *Лискина Е.Ю.* Исследование трехфакторной динамической системы экономики региона, учитывающей конечное потребление и ограниченные ресурсы // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Темат. обзоры. 2018. №148. С. 75–82.
5. *Попель С.А.* Построение динамической модели экономики региона с дискретным временем, модифицированной производственной функцией Аллена и конкуренцией за ресурс рабочих мест / С.А. Попель, Е.Ю. Лискина // Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании и управлении рисками. 2022. № 7. С. 270–275.
6. *Ребро И.В.* Прикладная математическая статистика для технических специальностей: учеб. пособие / И.В. Ребро, В.А. Носенко, Н.Н. Короткова; ВПИ (филиал) ВолгГТУ. Волгоград: ИУНЯ ВолгГТУ, 2011. 149 с.
7. Регионы России. Социально-экономические показатели: статистический сборник. 2010–2021 гг. // Федеральная служба государственной статистики: [сайт]. URL: <https://rosstat.gov.ru/folder/210/document/13204> (дата обращения: 4.10.2022 г.).
8. *Реннер А.Г.* К вопросу о построении и анализе односекторной модели экономики // Вестник Оренб. гос. ун-та. 2010. № 13 (219). С. 273–275.
9. *Семерикова Е.В.* Взаимодействие региональных рынков труда в России: анализ с помощью пространственных эконометрических моделей / Е.В. Семерикова, О.А. Демидова // Пространственная экономика. 2016. № 3. С. 57–80. DOI: 10.14530/se.2016.3.057-080
10. Эконометрика: учебник / под ред. И.И. Елисеевой. М.: Финансы и статистика, 2002. 344 с.
11. *Liskina, E. Ju.* Econometric modeling of economic factors's impact on the labor force per capita / E. Ju. Liskina and E. I. Davydova // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1784. P. 012003. DOI:10.1088/1742-6596/1784/1/012003.

УДК 517.956.4:536.212.2

**Д. В. Малышев<sup>1</sup>, М. Е. Соловьев<sup>1</sup>,  
С. Л. Балдаев<sup>2</sup>, В. И. Мищенко<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Ярославский государственный технический университет  
Россия, г. Ярославль, e-mail: deniscs49@gmail.com, m.e.soloviev@gmail.com  
<sup>2</sup>ООО «Технологические системы 113 защитных покрытий»  
г. Москва, г. Щербинка, e-mail: s.baldaev@tspc.ru, v.mishchenko@tspc.ru

## **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСТЫВАНИЯ ДОРОЖКИ НАПЫЛЕНИЯ ПОРОШКОВОГО ПОКРЫТИЯ**

*Рассматривается численное решение методом конечных элементов уравнения теплопроводности в задаче об остывании дорожки газотермического напыления порошкообразного покрытия металла. Форма профиля сечения дорожки аппроксимирована уравнением эллипса. Исследовано влияние размеров поперечного сечения дорожки на изменение во времени распределения температуры по сечению.*

**Ключевые слова:** металлические покрытия, газотермическое напыление, уравнение теплопроводности, метод конечных элементов

**D. V. Malyshev<sup>1</sup>, M. E. Soloviev<sup>1</sup>, S. L. Baldaev<sup>2</sup>,  
V. I. Mishchenko<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Yaroslavl State Technical University  
Russia, Yaroslavl, e-mail: deniscs49@gmail.com, m.e.soloviev@gmail.com  
<sup>2</sup>LLC "Technological systems of protective coatings"  
Moscow, Shcherbinka, e-mail: s.baldaev@tspc.ru, v.mishchenko@tspc.ru

## **NUMERICAL SIMULATION OF COOLING POWDER COATING PATHS**

*A numerical solution by the finite element method of the heat conduction equation in the problem of cooling down a path of thermal spraying of a powdered metal coating is considered. The track section profile shape is approximated by the ellipse equation. The influence of the dimensions of the cross section of the track on the change in time of the temperature distribution over the section has been studied.*

**Keywords:** metal coatings, thermal spraying, heat equation, finite element method

Надежность и долговечность деталей машин и механизмов определяется конструктивной прочностью материалов, из которых они выполнены

ны. Для получения высоких характеристик конструктивной прочности поверхностных слоев часто применяются различные методы нанесения покрытий, позволяющие защитить материал основы от внешних воздействий, повысить срок службы деталей, а также придать поверхности детали новые свойства [1, 2].

Нанесение порошкового покрытия методом плазменного и лазерного напыления осуществляется путем последовательных проходов распылительной головки над основой детали. При однократном проходе головки расплавленные порошкообразные частицы образуют дорожку, профиль поперечного сечения которой, часто аппроксимируют дугой эллипса или окружности [3, 4]. Как показывают эксперименты, прочность связи покрытия с подложкой существенно зависит от характера распределения температуры в сечении дорожки, а также в области детали, непосредственно к ней примыкающей [5].

Целью настоящей работы явилось численное моделирование распределения температуры в поперечном сечении дорожки и прилегающей области детали в процессе ее остывания после нанесения на основу.

Достижение поставленной цели осуществлялось путем решения уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T \quad \text{в области } \Omega \times [0, t_{end}], \quad (1)$$

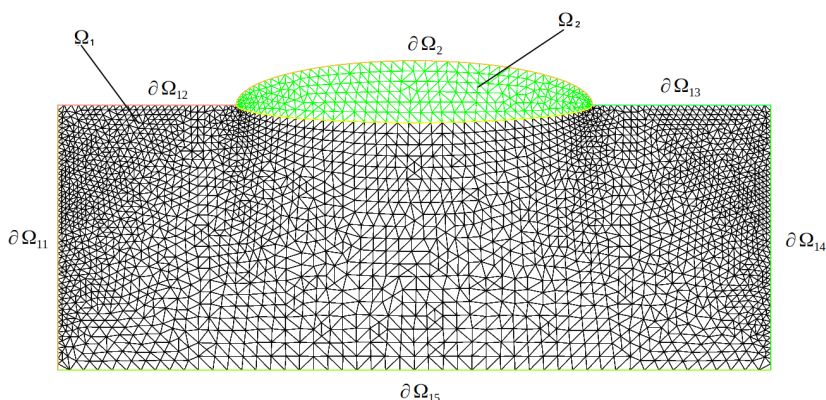
где  $a = \lambda / c\rho$  – коэффициент температуропроводности;  $\lambda$  – теплопроводность;  $c$  — теплоемкость среды.

В качестве основы в настоящей работе рассматривалась сталь, а в качестве покрытия хромо-никелевый сплав. Значения коэффициентов температуропроводности материалов для основы и покрытия были приняты равными, соответственно,  $7.97E-06$  и  $5.89E-06$  м<sup>2</sup>/с на основе справочных данных, приведенных в [6].

Решение задачи осуществлялось в двумерной постановке методом конечных элементов [7, 8]. Схема модели основы с покрытием для решения задачи в двумерной постановке с разбивкой на сетку треугольных конечных элементов показана на рис. 1. Профиль сечения дорожки был аппроксимирован дугами эллипса. При разбиении геометрической модели на сетку конечных элементов, контуры дорожки и блока основы разбивались на 50 отрезков, что обеспечивало достаточный уровень сгущения сетки в области дорожки.

Начальные условия отвечают распределению температуры в точках среды в начальный момент времени:

$$T(x, 0) = T_0(x), \quad x \in \Omega.$$



**Рис. 1. Схема модели основы с дорожкой покрытия с разбивкой на сетку конечных элементов**

В нашем случае область  $\Omega$  состоит из двух областей:  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , где  $\Omega_1$  – область основы,  $\Omega_2$  – область покрытия. Начальные температуры в областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  были приняты постоянными и равными  $25^\circ\text{C}$  для основы и  $1400^\circ\text{C}$  для покрытия. Начальная температура для покрытия имеет близкое значение к температуре затвердевания хромоникелевого сплава, а также стали в области подплавки, что соответствовало цели исследования.

В качестве граничных условий использовались следующие:

1. Условие теплоизоляции на границах  $\partial\Omega_{11}$ ,  $\partial\Omega_{14}$ :

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0; \quad (2)$$

2. Постоянство температуры (термостат) на границе  $\partial\Omega_{15}$ :

$$T(x, t) = \mu = 25^\circ\text{C}; \quad (3)$$

3. Теплоотдача по закону Ньютона-Рихмана на границах  $\partial\Omega_{12}$ ,  $\partial\Omega_{13}$ ,  $\partial\Omega_2$ :

$$\alpha \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha(T - T_e) = 0, \quad (4)$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи в воздух;  $T_e$  – равновесная температура воздуха.

При численном решении уравнения теплопроводности для производной температуры по времени использовалась разностная аппроксимация

$$\frac{T^{m+1} - T^m}{\tau} = a \Delta T^{m+1}, \text{ где } T^m = T(x, m\tau), \quad x \in \Omega. \quad (5)$$

Для граничных условий использовалась аппроксимация

$$a \frac{\partial T^{m+1}}{\partial n} + \alpha(T^{m+1} - T_e) = 0 \text{ на границах } \partial\Omega_{12}, \partial\Omega_{13}, \partial\Omega_2. \quad (6)$$

$$T^{m+1} = \mu \text{ на границе } \partial\Omega_{15}. \quad (7)$$

С учетом аппроксимаций вариационная постановка задачи для уравнения теплопроводности принимает вид

$$\int_{\Omega} \left( \frac{T^{m+1} - T^m}{\tau} v + a T^{m+1} \cdot \nabla v \right) + \int_{\partial\Omega_{15}} \mu v + \int_{\partial\Omega_{12} \cup \partial\Omega_{13} \cup \partial\Omega_2} \alpha(T^{m+1} - T_e) v = 0, \quad (8)$$

где  $v \in H^1(\Omega)$  – произвольная функция. Программный код для решения задачи написан в пакете FreeFEM [9].

Для оценки влияния характера профиля сечения дорожки были проведены расчеты изменения распределения температуры для двух размеров дорожек эллиптического сечения, описываемых параметрическими уравнениями

$$x = R_{1x} \cos t, \quad y = R_{1y} \sin t, \quad t \in [0, \pi), \quad (9)$$

$$x = R_{2x} \cos t, \quad y = R_{2y} \sin t, \quad t \in [\pi, 2\pi), \quad (10)$$

где  $R_{1x} = 2$  мм,  $R_{2x} = 1$  мм,  $R_{1y} = 0,5$  мм,  $R_{2y} = 0,2$  мм.

Уравнение (9) соответствует основной части дорожки, уравнение (10) отвечает нижней части (зона подплавки).

На рис. 2–5 приведены рассчитанные профили распределения температуры в различные моменты времени для двух рассмотренных размеров профилей сечения дорожки.

Как видно, с увеличением площади сечения скорость остывания дорожки закономерно уменьшается, что вполне ожидаемо с физической точки зрения.

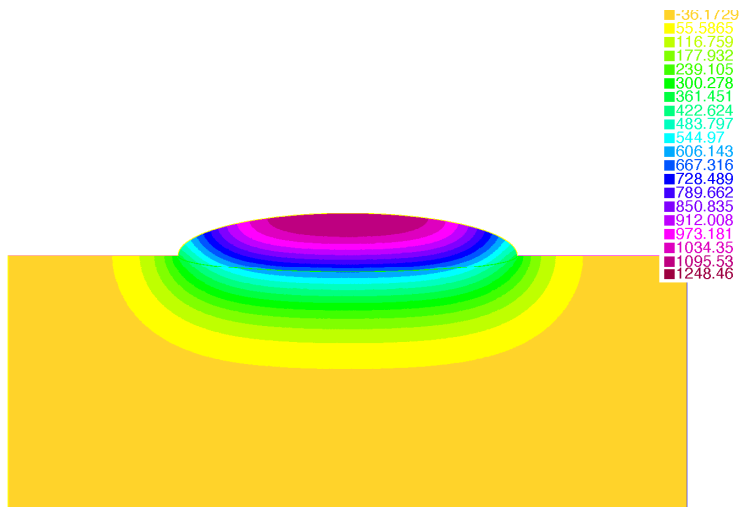


Рис. 2. Распределение температуры по сечению дорожки в момент времени  $t = 0.001$  с для первого профиля

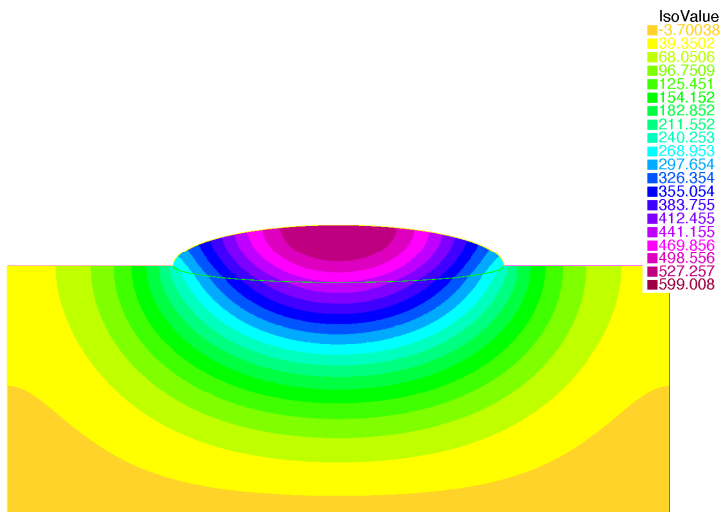


Рис. 3. Распределение температуры по сечению дорожки в момент времени  $t = 0.01$  с для первого профиля

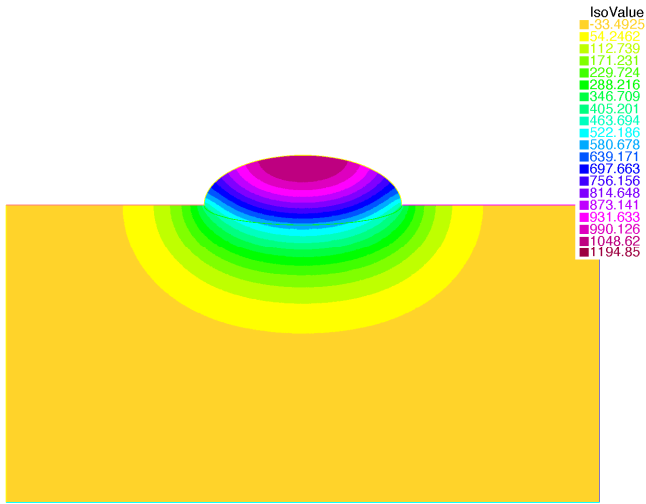


Рис. 4. Распределение температуры по сечению дорожки в момент времени  $t = 0.001$  с для второго профиля

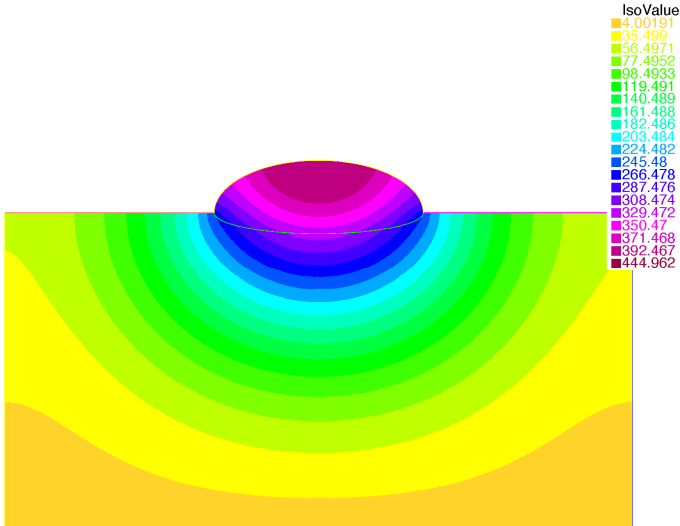


Рис. 5. Распределение температуры по сечению дорожки в момент времени  $t = 0.01$  с для второго профиля

Таким образом, рассмотренная модель позволяет прогнозировать распределение температуры в сечении дорожки для разных условий наплавки. Эта задача актуальна при расчете оптимальных условий формирования покрытия при параллельном нанесении дорожек, поскольку качество покрытия между смежными дорожками в значительной мере зависит от распределения температур в данной области.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лобанов М.Л.* Защитные покрытия / Н.Г. Кардонина, Н.Г. Россина, А.С. Юровских. Екатеринбург: Издательство Урал ун-та, 2014. 200 с.
2. *Davis J.R.* Handbook of Thermal Spray Technology / ed. by J.R. Davis. ASM International, 2004. 347 p.
3. *Jhavar S.* Development of micro-plasma transferred arc ( $\mu$ -PTA) wire deposition process for additive layer manufacturing applications / S. Jhavar, N.K. Jain, C.P. Paul // Journal of Materials Processing Technology. 2014. Vol. 214. P. 1102–1110. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2013.12.016>
4. *Jain N.K.* Metal Deposition: Plasma-Based Processes. Encyclopedia of Plasma Technology / N.K. Jain, M.S. Sawant, S.H. Nikam, S. Jhavar. New York: Taylor and Francis, 2016. P. 19. DOI: 10.1081/E-EPLT-120053919.
5. *De Oliveira U.* Analysis of coaxial laser cladding processing conditions / U. De Oliveira, V. Ocelk, J.Th.M. De Hosson // Surface & Coatings Technology. 2005. Vol. 197. P. 127–136. URL: <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2004.06.029>
6. Чиркин В.С. Теплофизические свойства материалов ядерной техники. М.: Атомиздат, 1968. 484 с.
7. *Hutton D.V.* Fundamentals of finite element analysis. New York: McGraw-Hill, 2004. 505 p.
8. *Smith L.M.* Programming the finite element method / L.M. Smith, D.V. Griffiths. John Wiley & Sons, 1988. 478 p.
9. *Hecht F.* FreeFEM Documentation. Release 4.6. Paris: Sorbonne University, 2021. 673 p. URL: <https://freefem.org/>



УДК 621.793.74:62-492.2

**М. К. Мельников<sup>1</sup>, М. Е. Соловьев<sup>1</sup>, С. Л. Балдаев<sup>2</sup>,  
М. О. Федорова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Ярославский государственный технический университет  
Россия, г. Ярославль, *e-mail: mixteryar1998@yandex.ru*,  
*m.e.soloviev@gmail.com*

<sup>2</sup>ООО «Технологические системы защитных покрытий»  
г. Москва, г. Щербинка, *e-mail: s.baldaev@tspc.ru, m.fedorova@tspc.ru*

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОТНОСТИ УПАКОВКИ ЧАСТИЦ Порошкового покрытия МЕТОДОМ ДИСКРЕТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

*Рассматривается численное моделирование методом дискретных элементов плотности упаковки частиц порошкообразного покрытия металла. В качестве модели материала частиц использовано уравнение состояния вязкоупругого тела с трением и адгезией. Исследовано влияние размеров частиц и параметров функции распределения по размерам на коэффициент упаковки.*

**Ключевые слова:** *металлические покрытия, газотермическое напыление, плотность упаковки, метод дискретных элементов*

**M. K. Melnikov<sup>1</sup>, M. E. Soloviev<sup>1</sup>, S. L. Baldaev<sup>2</sup>, M. O. Fedorova<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Yaroslavl State Technical University  
Russia, Yaroslavl, *e-mail: mixteryar1998@yandex.ru, m.e.soloviev@gmail.com*  
<sup>2</sup>LLC "Technological systems of protective coatings"  
Moscow, Shcherbinka, *e-mail: s.baldaev@tspc.ru, m.fedorova@tspc.ru*

## **SIMULATION OF THE PACKING DENSITY OF POWDER COATING PARTICLES BY THE DISCRETE ELEMENT METHOD**

*Numerical modeling by the method of discrete elements of the packing density of particles of a powdered metal coating is considered. The equation of state of a viscoelastic body with friction and adhesion is used as a particle material model. The effect of particle sizes and parameters of the size distribution function on the packing factor is studied.*

**Keywords:** *metal coatings, thermal spraying, packing density, discrete element method.*

Газотермическое нанесение порошковых покрытий обеспечивает создание на поверхности деталей слоев материала с ценным комплексом

свойств: повышенной износостойкостью, твердостью, коррозионной стойкостью, теплостойкостью и другими специальными свойствами [1-3]. Нанесение на поверхность изделия дисперсного материала осуществляется высокотемпературным газовым потоком, создаваемым при помощи газофакельной или плазменной свечи. При этом частицы, спекаясь на поверхности основы, образуют покрытие, обладающее требуемыми характеристиками. Хотя при формировании покрытия происходит сплавление отдельных частиц, тем не менее, при малой плотности их упаковки покрытие может содержать поры, что отрицательно отражается на его прочностных свойствах. В этой связи фракционный состав исходного дисперсного материала играет немаловажную роль.

Следует отметить, что задача определения фракционного состава дисперсной системы, при котором достигается максимальная плотность упаковки составляющих ее частиц, встречается во многих областях техники [4, 5]. Теоретически проблема плотной упаковки сферических частиц начала изучаться достаточно давно. В качестве примеров плотной упаковки монодисперсных сферических частиц можно привести кубическую и гексагональную упаковку, плотность которых составляет, приблизительно, 52.36 и 74.05% соответственно. Для получения более плотной структуры необходимо использовать би- или полидисперсные (присутствуют частицы двух и более размеров) смеси, так как пустоты, образующиеся при любом типе упаковки, заполняются частицами меньших размеров. Однако на практике, в частности при получении порошковых покрытий, регулярная упаковка частиц не достигается. Теоретически плотность упаковки нерегулярно расположенных частиц оценить невозможно. В этой связи возникает задача численного исследования влияния дисперсного состава материала на плотность упаковки порошкообразной композиции.

Целью настоящей работы явилось численное моделирование упаковки сферических деформируемых частиц методом дискретных элементов.

Метод дискретных элементов (Discrete Element Method, DEM) основан на описании динамики частиц с использованием уравнений классической механики. В настоящее время этот метод находит широкое применение при моделировании процессов, связанных с перемещением сыпучих сред, а также механических процессов в твердых дисперсных системах [6, 7]. В связи с развитием аддитивных технологий появились работы, посвященные моделированию этим методом 3D-печати с использованием порошкообразных металлических порошков [8–10]. Данная технология по сути является разновидностью лазерной наплавки.

В основе метода дискретных элементов лежит численное решение уравнений 2-го закона Ньютона применительно к ансамблю твердых частиц с массами  $m_i$  :

$$m_i \frac{d^2}{dt^2} r_i = F_i + m_i g, \quad I_i \frac{d}{dt} \omega_i = T_i,$$

где  $r_i$  – радиус-вектор  $i$ -й частицы;  $F_i$  – вектор силы, действующей на данную частицу со стороны остальных;  $g$  – вектор массовых сил, действующих на частицу (в данной работе – вектор силы тяжести);  $I_i$  – момент инерции частицы;  $\omega_i$  – вектор угловой скорости частицы;  $T_i$  – полный вращательный момент частицы.

В настоящей работе мы рассматриваем только контактные взаимодействия сферических частиц, так что векторы сил  $F_i$  и моментов  $T_i$  вычисляются суммированием по всем контактным взаимодействиям

$$F_i = \sum_c F_i^c, \\ T_i = \sum_c (l_i^c \times F_i^c + q_i^c),$$

где первый член в скобках в правой части отвечает контактным моментам, обусловленным сдвиговыми (касательными взаимодействиями), а  $q_i^c$  – векторы контактных моментов, не связанных с тангенциальными силами, то есть возникающие при качении и повороте относительно нормали, соединяющей частицы.

Силы контактного взаимодействия могут быть представлены в виде суммы нормальных и касательных составляющих

$$F_i^c = F_i^n n + F_i^t t,$$

где  $n$  и  $t$  – единичные векторы нормали и касательной в точке контакта.

Поскольку взаимодействующие частицы находятся при температурах, близких к температурам плавления соответствующих материалов, взаимодействие описывается уравнениями вязкоупругости [11].

Силы вязкоупругости описываются в рамках линейной модели

$$F^n = k^n \delta + \gamma^n v^n, \quad F^t = k^t \xi + \gamma^t v^t,$$

где  $k^n$  и  $k^t$  – коэффициенты нормальной и сдвиговой жесткости соответственно;  $\gamma^n$  и  $\gamma^t$  – коэффициенты потерь при нормальной и касательной деформации соответственно;  $v^n$  и  $v^t$  – относительные скорости частиц в направлении нормали и касательной;  $\delta$  и  $\xi$  – нормальная и касательная деформации в точке контакта.

В рамках модели вязкоупругости рассчитывается время контакта  $i$ -й и  $j$ -й частиц:

$$t_c = \pi / \omega_{ij},$$

где  $\omega_{ij} = \sqrt{k^n / m_{ij} + \eta_0^2}$  – собственная частота колебаний;  $\eta_0 = \gamma^n / m_{ij}$  – коэффициент демпфирования;  $m_{ij} = m_i m_j / (m_i + m_j)$  – приведенная масса частиц.

Время контакта используется для вычисления коэффициента восстановления скорости, представляющего собой отношение скоростей частицы после и до столкновения

$$e_i = -v' / v = \exp(\eta_0 t_c).$$

При описании адгезионного взаимодействия частиц использовали модель Дерягина-Мюллера-Топорова [12], в соответствии с которой сила адгезионного взаимодействия рассчитывается по формуле

$$F^{ne} = \frac{4Ea^3}{3R} - 4\pi\gamma R,$$

где  $E$  – модуль Юнга частиц;  $a$  – контактный радиус;  $R$  – радиус недеформированной частицы;  $\gamma$  – поверхностная энергия.

В настоящей работе использовалась реализация метода DEM в программном комплексе YADE [13]. Программный код, моделирующий процесс нанесения порошкообразного покрытия, написан на алгоритмическом языке Python с использованием библиотеки numpy [14].

Порошок представлял собой полидисперсные сферические частицы с равномерным распределением по размерам с заданным средним радиусом  $R_{avg}$  и относительным стандартным отклонением  $\delta_R$ .

Физические свойства материала частиц и основы были приняты соответствующими стали: модуль Юнга  $200 \cdot 10^9$  Па, коэффициент Пуассона 0.3, плотность  $7.9 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, значение угла трения частиц 0.5, коэффициенты вязкоупругого восстановления скорости в нормальном и тангенциальном направлении для частиц были приняты равными 0.001, что отвечает практически полностью вязкому соударению.

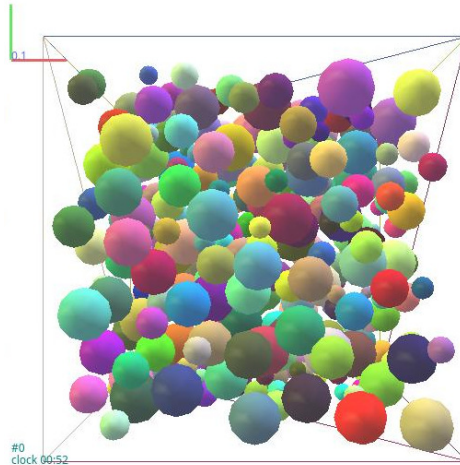
Исходная геометрическая модель системы представляла собой куб, равномерно заполненный частицами, распределенными случайным образом. После начала интегрирования по времени уравнений движения, частицы, взаимодействуя друг с другом, оседали на дно куба, таким образом, что при его достижении частицей ее координаты фиксировались. В ходе решения задачи вычислялась пористость слоя осевших частиц по формуле

$$p = \frac{V - V_s}{V},$$

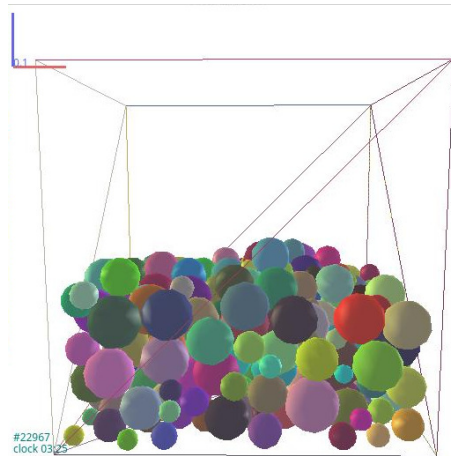
где  $V$  – общий объем слоя;  $V_s$  – объем частиц.

Вычисление пористости производили после каждых 100 шагов интегрирования по времени. Интегрирование уравнений движения заканчивали после того, как значение пористости переставало изменяться.

На рис. 1 приведен пример модели до начала интегрирования и после окончания. Как видно, слой неупорядоченных частиц с равномерным распределением по размерам имеет достаточно рыхлую упаковку.

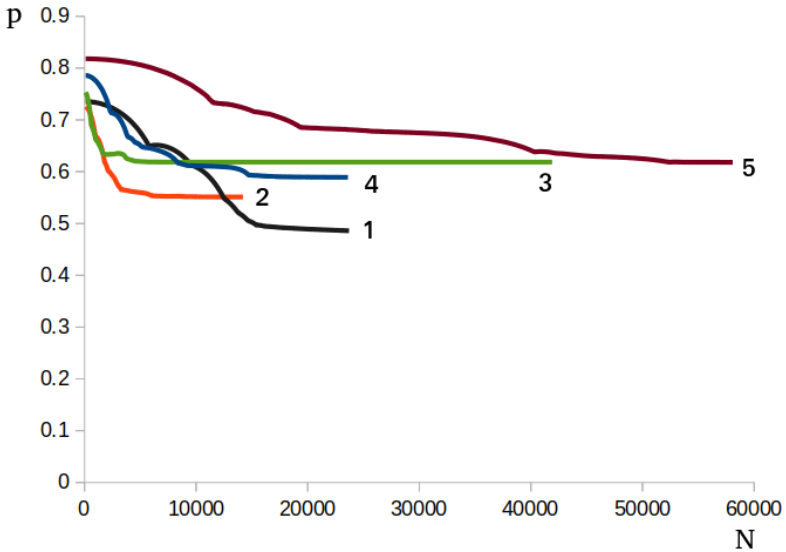


*a*



*б*

**Рис. 1. Распределение частиц в кубе со стороной ячейки 0.5 м до начала интегрирования (а) и после окончания интегрирования (б). Распределение частиц по размерам - равномерное со средним значением  $R_{avg} = 0,05$  м и относительным стандартным отклонением  $\delta_R = 0,5$**



**Рис. 2.** Зависимость пористости слоя частиц от числа шагов интегрирования по времени уравнений движения  $N$ . Параметры распределения по размерам частиц: 1 –  $R_{avg} = 0,01$  м;  $\delta_R = 0,001$ ; 2 –  $R_{avg} = 0,05$  м,  $\delta_R = 0,001$ ; 3 –  $R_{avg} = 0,09$  м,  $\delta_R = 0,001$ ; 4 –  $R_{avg} = 0,05$  м,  $\delta_R = 0,5$ ; 5 –  $R_{avg} = 0,05$  м,  $\delta_R = 0,9$ .

Значения поверхностной энергии частиц  $\gamma = 0$

С увеличением числа шагов интегрирования по времени уравнений движения происходит постепенное уплотнение слоя частиц, пока величина  $p$  не достигает постоянного значения, зависящего от начального распределения по размерам частиц (рис. 2).

Порошки с практически монодисперсным распределением частиц (кривые 1, 2, 3) имеют тем более плотную упаковку, чем меньше средний размер частиц. Для порошков с более широким распределением по размерам плотность упаковки уменьшается за счет добавления в распределение частиц крупных размеров. Кривые на рис. 2 рассчитаны при отсутствии когезионного взаимодействия частиц. При учете когезионного взаимодействия, начиная с определенного значения поверхностной энергии, кинетика уплотнения меняется (рис. 3).

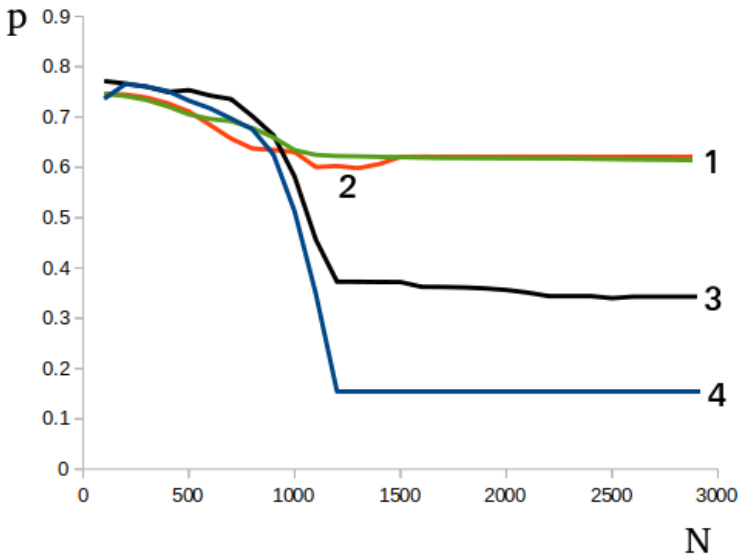


Рис. 3. Зависимость пористости слоя частиц от числа шагов интегрирования по времени уравнений движения. Значения поверхностной энергии частиц (кДж/м<sup>2</sup>): 1 -  $\gamma = 0$ ; 2 -  $\gamma = 30$ ; 3 -  $\gamma = 40$ ; 4 -  $\gamma = 50$ .

Параметры распределения по размерам частиц:  $R_{avg} = 0,09$  м,  $\delta_R = 0,01$

При  $\gamma < 30$  кДж/м<sup>2</sup> кривые кинетики уплотнения частиц мало отличаются от кривой уплотнения с отсутствием адгезионного взаимодействия (кривые 1, 2). Однако при больших значениях поверхностной энергии характер кривых изменяется, и на них, начиная с некоторого момента, появляется область резкого уплотнения. После достижения максимальной плотности упаковки она далее не изменяется.

Высокие значения плотности упаковки возникают по той причине, что, начиная с определенных значений поверхностной энергии, происходит взаимное проникновение контактирующих частиц. Этот эффект формально можно интерпретировать как сплавление частиц. Для иллюстрации на рис. 4 приведены изображения двух пар частиц после окончания интегрирования по времени с различными значениями поверхностной энергии.

Как видно, при малом значении поверхностной энергии частицы после полного установления контакта и окончания переходного процесса практически лишь соприкасаются друг с другом, тогда как при значении поверхностной энергии 50 кДж/м<sup>2</sup> после установления равновесия проис-

ходит существенное их взаимное проникновение. Разумеется, трактовать это как сплавление можно лишь с определенной долей условности, поскольку при взаимном проникновении частиц полный объем системы уменьшается. В то же время можно отметить, что ошибка, связанная с уменьшением объема частиц, не слишком велика, тогда как уменьшение пористости при этом весьма существенно (см. рис. 3). То есть при сплавлении частиц основной вклад в уменьшение объема дает уменьшение объема пустот, а не полного объема частиц.

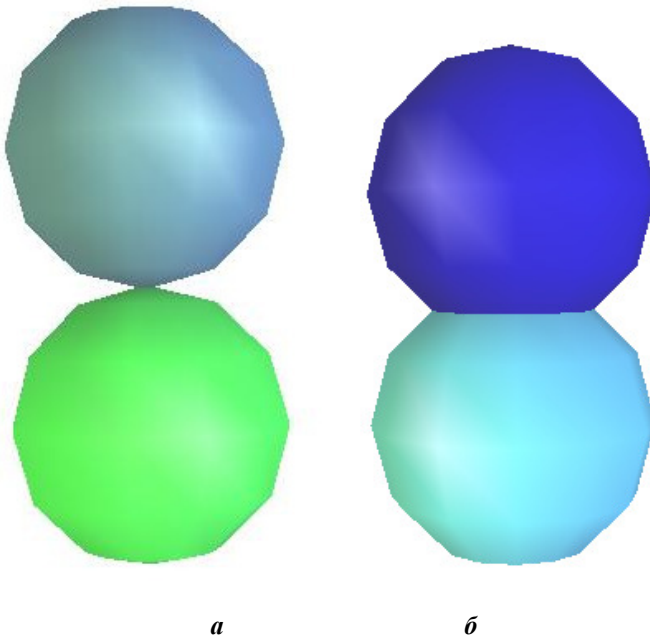


Рис. 4. Конфигурации двух пар частиц после окончания интегрирования по времени: *a* -  $\gamma = 1$  кДж/м<sup>2</sup>; *б* -  $\gamma = 50$  кДж/м<sup>2</sup>

Процесс образования сплошного покрытия после его нанесения газотермическим способом можно условно разделить по крайней мере на две стадии. На первой стадии образуется слой с достаточно высокой пористостью в результате образования первичных вязкоупругих контактов частиц. На второй стадии происходит спекание частиц. При этом происходит объемная усадка покрытия за счет уменьшения объема пор.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кудинов В.В.* Нанесение покрытий напылением. Теория, технология и оборудование / В.В. Кудинов, Г.В. Бобров. М.: Металлургия, 1992. 432 с.
2. *Davis J.R.* Handbook of Thermal Spray Technology / ed. by J.R. Davis. ASM International, 2004. 347 p.
3. Газотермическое напыление / под общей ред. Л.Х. Балдаева. М.: Маркет ДС, 2007. 344 с.
4. *Sobolev K.* The simulation of particulate materials packing using a particle suspension model / K. Sobolev, A. Amirjanov // Advanced Powder Technol. 2007. Vol. 18, № 3. P. 261–271.
5. Numerical simulation of mechanical response of glacial tills under biaxial compression with the DEM / Y. Liang, L. Cao, J. Liu [et al.] // Bull Eng Geol Environ. 2019. Vol. 78. P. 1575–1588. URL: <https://doi.org/10.1007/s10064-018-1229-2>
6. *Jing L.* Fundamentals of Discrete Element Methods for Rock Engineering: Theory and Applications / L. Jing, O. Stephansson. Elsevier, 2007. 545 p.
7. *Onate E.* Particle-Based Methods: Fundamentals and Applications. Computational Methods in Applied Sciences / E. Onate, D.R.J. Owen. Springer, 2011. Vol. 25. 267 p.
8. *Steuben J.C.* Discrete element modeling of particle-based additive manufacturing processes / J.C. Steuben, A.P. Iliopoulos, G.J. Michopoulos // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2016. Vol. 305, № 15. P. 537-561.
9. *Haeri S.* Discrete element simulation and experimental study of powder spreading process in additive manufacturing / S. Haeri, Y. Wang, O. Ghita, J. Sun // Powder Technology. 2016. Vol. 306. P. 45–54.
10. A Review on Discrete Element Method Simulation in Laser Powder Bed Fusion Additive Manufacturing / H. Chen, Y. Sun, W. Yuan, S. Pang, W. Yan, Y. Shi // Chinese Journal of Mechanical Engineering: Additive Manufacturing Frontiers. 2022. Vol. 1. ID 100017. URL: <https://doi.org/10.1016/j.cjmeam.2022.100017>
11. *Luding S.* Introduction to discrete element methods // European Journal of Environmental and Civil Engineering. 2011. Vol. 12, № 7-8. P. 785-826. URL: <http://dx.doi.org/10.1080/19648189.2008.9693050>
12. *Derjaguin B.V.* Effect of contact deformations on the adhesion of particles / B.V. Derjaguin, V.M. Muller, Y.P. Toporov // J. Colloid Interface Sci. 1975. Vol. 53, № 2. P. 314-326. URL: [https://doi.org/10.1016/0021-9797\(75\)90018-1](https://doi.org/10.1016/0021-9797(75)90018-1)
13. Yade Documentation / Smilauer V. [et al.]. 3rd ed. The Yade Project, 2021. 878 p. DOI: 10.5281/zenodo.5705394. URL: <http://yade-dem.org>
14. Array programming with NumPy / C.R. Harris, K.J. Millman, S.J. van der Walt [et al.]. Nature. 2020. Vol. 585. P. 357–362. DOI: 10.1038/s41586-020-2649-2.

УДК 51-7:66.048

**М.А. Смирнов, А.И. Балунув**

Ярославский государственный технический университет,  
Россия, г. Ярославль, e-mail: maks11041998@rambler.ru, balunovai@ystu.ru

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ПРОГРАММНОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ ДЛЯ РАСЧЕТА КОЛОНН РЕКТИФИКАЦИИ НЕФТЯНЫХ СМЕСЕЙ**

*Рассмотрен основанный на информационном принципе максимальной энтропии метод расчета наиболее вероятных составов продуктов разделения при ректификации непрерывных смесей типа нефти и ее фракций. Приведены алгоритмы расчета функций распределения и концентраций отдельных фракций в продуктовых потоках колонны ректификации в проектной и поверочной постановках задачи. В проектной постановке расчет проводится при заданных ограничениях на состав продуктов, а в поверочной – при фиксированном значении параметра, характеризующего условную высоту колонн. Изложенные алгоритмы реализованы в программном приложении, которое может быть использовано для поддержки принятия решений как при проектировании новых ректификационных аппаратов, так и при оптимизации действующих аппаратов.*

**Ключевые слова:** ректификация, непрерывная смесь, принцип максимальной энтропии, функция распределения состава, алгоритм расчета, программное приложение

**M.A. Smirnov, A.I. Balunov**

Yaroslavl State Technical University,  
Russia, Yaroslavl, e-mail: maks11041998@rambler.ru, balunovai@ystu.ru

## **MATHEMATICAL MODEL AND SOFTWARE APPLICATION FOR OIL MIXTURES RECTIFICATION COLUMNS CALCULATION**

*A method based on the maximum entropy information principle for calculating the most probable separation products compositions in the type of oil and its fractions continuous mixtures rectification is considered. Algorithms for calculating the distribution functions and concentrations of individual fractions in the product flows of the distillation column in the design and verification formulations of the problem are presented. In the design setting, the calculation is carried out under given restrictions on the products composition, and in the verification setting, at a fixed value of the parameter characterizing the conditional height of the column. The described algorithms are implemented in a software application that can be used to support decision making both in the*

*design of new distillation apparatuses and in the optimization of existing apparatuses.*

**Keywords:** *rectification, continuous mixture, maximum entropy principle, composition distribution function, calculation algorithm, software application*

**Введение.** В основе расчета и анализа процессов разделения нефтяных смесей лежит представление их фракционного состава в виде кривых истинных температур кипения (ИТК), которые строят по данным экспериментальной фракционной разгонки. Простая перестановка координат позволяет перейти от кривой ИТК к интегральной функции распределения состава –  $e(T)$ , где  $e$  – мольная доля отгона смеси, а  $T$  – температура кипения микрокомпонента [1]. Однако непосредственно в расчетах используют дифференциальную функцию распределения состава –  $de(T)/dT$ , применение которой позволяет привести расчетные зависимости для непрерывных смесей типа нефти и ее фракций к форме, подобной уравнениям для дискретных (многокомпонентных) смесей.

В настоящей работе функции распределения состава использованы при математическом описании процесса ректификации непрерывных смесей на основе информационного принципа максимальной энтропии [2]. В литературе этот принцип известен как формализм Джейнса [3, 4], по имени американского физика Е.Т. Джейнса, предложившего рассматривать информационную энтропию в качестве критерия максимального правдоподобия в ситуациях, когда целью математического моделирования является поиск наиболее вероятного распределения в условиях неопределенности. Характер искомых распределений может быть самый разнообразный – от задач статистической физики и термодинамики [3] до экономических задач [4] и экологии [5].

Продемонстрируем применение принципа максимальной энтропии на классическом примере, в котором требуется найти наиболее правдоподобное распределение случайной величины [6].

Введем дисперсию случайной величины  $x$

$$\sigma^2 = \int x^2 p(x) dx, \quad (1)$$

а также условие нормировки вероятностей

$$\int p(x) dx = 1. \quad (2)$$

Согласно формализму Джейнса наиболее правдоподобный вид функции распределения вероятностей  $p(x)$  будет отвечать максимальному значению энтропии

$$H = - \int p(x) \log p(x) dx$$

при соблюдении ограничений (1), (2). Решение этой условной экстремальной задачи хорошо известно:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right). \quad (3)$$

Выражение (3) есть не что иное, как нормальный (гауссов) закон распределения.

Ниже на основе информационного принципа максимальной энтропии первоначально найдем закон наиболее правдоподобного распределения микрокомпонентов непрерывной смеси в продуктовых потоках простой (двухпродуктовой) ректификационной колонны. Затем рассмотрим постановки и алгоритмы решения задач, которые можно сформулировать на основе полученного математического описания, а также функционал программного приложения, специально разработанного для решения этих задач.

### 1. Математическая модель

Сформулируем задачу о наиболее вероятном распределении микрокомпонентов между выходными потоками двухпродуктовой ректификационной колонны. Обозначим дифференциальную функцию (плотность) распределения мольного состава исходной смеси  $Z(T)$ , аналогичные функции дистиллята и кубового продукта –  $X^+(T)$  и  $X^-(T)$ , а отборы этих продуктов, отнесенные к одному молю исходной смеси (относительные мольные отборы) –  $\varepsilon_y$  и  $\varepsilon_x$ . По определению  $\varepsilon_y + \varepsilon_x = 1$ . При этом функция  $Z(T)$  на всем интервале температур кипения смеси непрерывная, неотрицательная и  $\int_{T_n}^{T_k} Z(T)dT = 1$ , где  $T_n$ ,  $T_k$  – температуры начала и конца кипения исходной смеси.

Запишем достоверную информацию о процессе в следующей форме:

$$\varepsilon_y X^+(T) + \varepsilon_x X^-(T) = Z(T), \quad T_n \leq T \leq T_k, \quad (4)$$

$$\int_{T_n}^{T_k} X^+(T)dT = 1, \quad (5)$$

$$\int_{T_n}^{T_k} X^-(T)dT = 1. \quad (6)$$

В приведенных соотношениях выражение (4) – уравнение материального

баланса колонны, записанное для микрокомпонентов, а уравнения (5) и (6) – условия нормировки.

Введем функции  $a_y(T)$  и  $a_x(T)$ , описывающие характерное для данной задачи свойство чистых микрокомпонентов при условиях (температуре и давлении) дистиллята и кубового продукта соответственно, и запишем еще одно уравнение для осредненного значения этих функций

$$\varepsilon_y \int_{T_H}^{T_K} X^+(T) a_y(T) dT + \varepsilon_x \int_{T_H}^{T_K} X^-(T) a_x(T) dT = \langle a \rangle, \quad (7)$$

где  $\langle a \rangle$  – математическое ожидание функций  $a_y(T)$  и  $a_x(T)$ .

Уравнение (7) является характерным для энтропийного метода [2]. Оно вводит свойства микрокомпонентов и фиксирует степень разделения в колонне при постановке задачи. Аналогично дискретным смесям  $a_y(T)$  и  $a_x(T)$  можно выразить через функции констант фазового равновесия и относительных летучестей микрокомпонентов [7, 8]

$$\begin{aligned} [a_y(T) - a_x(T)] - [a_y(T_3) - a_x(T_3)] &= \ln \sqrt{k^+(T)k^-(T)} - \ln \sqrt{k^+(T_3)k^-(T_3)} = \\ &= \ln k(T) - \ln k(T_3) = \ln \frac{k(T)}{k(T_3)} = \ln \alpha(T). \end{aligned}$$

Здесь  $k^+(T)$ ,  $k^-(T)$  – функции констант фазового равновесия микрокомпонентов от температуры их кипения для условий (температуры и давления) дистиллята и кубового продукта соответственно;  $k(T) = \ln \sqrt{k^+(T)k^-(T)}$  – то же эффективное значение;  $\alpha(T)$  – функция эффективного значения относительной летучести микрокомпонентов;  $T_3$  – температура кипения эталонного микрокомпонента, выбор которого произволен.

Теперь задача заключается в отыскании функций распределения составов в продуктовых потоках  $X^+(T)$  и  $X^-(T)$  при заданных  $\varepsilon_y$  ( $\varepsilon_x = 1 - \varepsilon_y$ ),  $Z(T)$ ,  $a_y(T)$ ,  $a_x(T)$  и  $\langle a \rangle$ . Поскольку в общем случае число неизвестных больше числа уравнений (5)–(7), то можно найти лишь наиболее вероятный закон распределения микрокомпонентов. Согласно формализму Джейнса наиболее вероятный вид функции  $X^+(T)$  и  $X^-(T)$  будет отвечать максимуму энтропии непрерывного множества

$$H = -\varepsilon_y \int_{T_H}^{T_K} X^+(T) \ln X^+(T) dT - \varepsilon_x \int_{T_H}^{T_K} X^-(T) \ln X^-(T) dT$$

при соблюдении ограничений (4)–(7). Такая задача может быть решена вариационным методом и сводится к изопериметрической задаче. Ее решение имеет форму [9, 10]:

$$X^+(T) = \frac{Z(T)}{\varepsilon_y + \varepsilon_x [k(T)/k(T_{гр})]^{\lambda}}, \quad X^-(T) = \frac{Z(T)}{\varepsilon_x + \varepsilon_y [k(T)/k(T_{гр})]^{\lambda}}. \quad (8), (9)$$

Здесь  $T_{гр}$  – значение температурной границы разделения (ТГР) смеси, при которой справедливо условие  $X^+(T_{гр})/X^-(T_{гр}) = 1$ ;  $\lambda$  – множитель Лагранжа в условной экстремальной задаче, соответствующий ограничению (7).

Отметим, что распределения (8), (9) записаны с учетом того обстоятельства, что после формального решения задачи заданным считается не математическое ожидание  $\langle a \rangle$ , а множитель Лагранжа  $\lambda$  [9, 10].

Концентрация  $i$ -й фракции, ограниченной температурами  $T_{ни}$  и  $T_{ки}$ , в продуктовых потоках рассчитывается по формулам:

$$\int_{T_{ни}}^{T_{ки}} X^+(T) dT = \int_{T_{ни}}^{T_{ки}} \frac{Z(T) dT}{\varepsilon_y + \varepsilon_x [k(T)/k(T_{гр})]^{\lambda}}, \quad (10)$$

$$\int_{T_{ни}}^{T_{ки}} X^-(T) dT = \int_{T_{ни}}^{T_{ки}} \frac{Z(T) dT}{\varepsilon_x + \varepsilon_y [k(T)/k(T_{гр})]^{\lambda}}. \quad (11)$$

Используя уравнения (8) и (9) для двух значений аргумента распределения  $T$  и  $T_{гр}$ , можно получить выражение, которое является аналогом известного уравнения Фенске-Андервуда в теории равновесной ректификации дискретных смесей

$$\lambda = \ln \frac{X^+(T)}{X^-(T)} \bigg/ \ln \frac{\alpha(T)}{\alpha(T_{гр})}, \quad T_H \leq T \leq T_K, \quad T \neq T_{гр}.$$

Следовательно, можно сделать вывод, что аналогично ректификации дискретных смесей множитель  $\lambda$  имеет физический смысл минимального числа теоретических ступеней разделения в безотборном режиме и характеризует разделительную способность колонны.

Так как относительная летучесть точечного компонента связана с его температурой кипения, то возможна иная форма представления дифференциальных функций распределения составов с заменой температуры как переменной на относительную летучесть [9, 11].

## 2. Алгоритмы расчета

Соотношения (8), (9) позволяют рассчитать наиболее вероятные распределения микрокомпонентов разделяемой смеси в продуктовых потоках колонны как в поперочном варианте расчета, который используют при анализе и оптимизации действующих ректификационных аппаратов, так и проектном варианте при заданном ограничении на качество разделения. Общими исходными данными для расчета по каждому из вариантов являются функции:  $Z(T)$ ,  $k^+(T)$  и  $k^-(T)$ , ( $T_{\text{н}} \leq T \leq T_{\text{к}}$ ). Фиксирование других параметров в распределениях (8), (9) в различных сочетаниях позволяет реализовать в каждом из вариантов по три алгоритма расчета. Рассмотрим особенности этих алгоритмов.

В поперочном варианте расчета задается условная высота колонны  $\lambda$  (параметр идентификации математической модели) и один из трех режимных параметров:  $\varepsilon_y$ ,  $T_{\text{гр}}$  или концентрация целевой фракции  $c$ , ограниченной температурами начала  $T_{\text{нс}}$  и конца  $T_{\text{кк}}$  кипения, в одном из продуктовых потоков колонны.

При фиксированном  $\varepsilon_y$  определению подлежит значение  $T_{\text{гр}}$ , которое является корнем одного из уравнений нормировки

$$\int_{T_{\text{н}}}^{T_{\text{к}}} \frac{Z(T)dT}{\varepsilon_y + \varepsilon_x [k(T)/k(T_{\text{гр}})]^{-\lambda}} = 1 \quad \text{или} \quad \int_{T_{\text{н}}}^{T_{\text{к}}} \frac{Z(T)dT}{\varepsilon_x + \varepsilon_y [k(T)/k(T_{\text{гр}})]^{\lambda}} = 1, \quad (12), (13)$$

а при заданной температурной границе разделения  $T_{\text{гр}}$  корнем этих же уравнений является  $\varepsilon_y$ .

При фиксированной концентрации целевой фракции  $c$  значения  $\varepsilon_y$  и  $T_{\text{гр}}$  определяются в результате решения системы уравнений, содержащей одно из условий нормировки (12) или (13) и уравнение, вытекающее из заданного ограничения на качество разделения

$$\int_{T_{\text{нс}}}^{T_{\text{кк}}} X^+(T)dT = c \quad \text{или} \quad \int_{T_{\text{нс}}}^{T_{\text{кк}}} X^-(T)dT = c. \quad (14), (15)$$

В проектном варианте расчета наряду с функциями распределения состава  $X^+(T)$  и  $X^-(T)$  определению подлежит условная высота колонны  $\lambda$ . Как отмечалось выше, в зависимости от сочетания фиксированных параметров возможны три алгоритма проектного расчета. При закрепленных  $\varepsilon_y$  и  $c$  определяются значения  $\lambda$  и  $T_{гр}$  в результате решения системы уравнений, содержащей оно из условий (12) или (13) и ограничение (14) или (15), а при закрепленных  $T_{гр}$  и  $c$  в результате решения этой же системы уравнений определяются значения  $\lambda$  и  $\varepsilon_y$ . Если фиксированы  $\varepsilon_y$  и  $T_{гр}$ , то определению подлежит только значение параметра  $\lambda$  из условия нормировки (12) или (13).

Во всех алгоритмах необходимые для расчета функции эффективных значений констант фазового равновесия  $k(T) = \sqrt{k^+(T)k^-(T)}$  первоначально находятся для температур дистиллята и кубового продукта, оцениваемых приближенно. После определения составов продуктовых потоков колонны эти температуры уточняются, и в случае необходимости расчет повторяется с новыми значениями  $k(T)$ . Для расчета  $k^+(T)$  и  $k^-(T)$  можно использовать уравнение Ашворта или другие аналитические формы, устанавливающие зависимость давления насыщенного пара микрокомпонентов непрерывной смеси от температур их кипения при фиксированной температуре в колонне [1]. Тогда

$$k^+(T) = P(T, T^+) / P_k \text{ и } k^-(T) = P(T, T^-) / P_k,$$

где  $P(T, T^+)$ ,  $P(T, T^-)$  – функции давления насыщенного пара микрокомпонентов от температуры их кипения при фиксированной температуре дистиллята и кубового продукта;  $P_k$  – давление в колонне;  $T^+$ ,  $T^-$  – температуры дистиллята и кубового продукта соответственно.

Поскольку в дефлегматоре дистиллят, отбираемый в виде пара известного состава  $X^+(T)$ , находится в состоянии термодинамического равновесия с жидкостью, образующейся в результате конденсации, то при фиксированном давлении температура в дефлегматоре находится из условия фазового равновесия в результате решения уравнения изотермы паровой фазы

$$\int_{T_H}^{T_K} \frac{X^+(T)}{k(T)} dT = 1. \quad (16)$$



Аналогично температура в кубе колонны находится в результате решения уравнения изотермы жидкой фазы

$$\int_{T_n}^{T_k} X^-(T)k(T)dT = 1. \quad (17)$$

Оба уравнения в большинстве случаев допускают только численное решение относительно температуры. Так как левые части этих уравнений монотонно зависят от температуры, то каждое из них имеет единственный корень.

Поскольку кривые ИТК нефти и ее фракций определяют экспериментально и не во всем диапазоне температур кипения смеси, возникает задача аппроксимации и экстраполяции экспериментальных данных аналитической зависимости. С этой целью часто используют усеченное нормальное распределение [1]

$$e(T) = \frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{T_n}^T \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-T_{50\%}}{\sigma}\right)^2\right] dt, \quad T_n \leq T \leq T_k,$$

где  $a$  – доля «неучтенного отгона», определяющая потери легких фракций при дегазации и выветривании нефти;  $T_{50\%}$  – температура выкипания 50% смеси;  $\sigma$  – параметр, характеризующий широту фракционного состава;  $t$  – параметр интегрирования.

Тогда дифференциальная функция распределения состава смеси будет иметь форму

$$Z(T) = \frac{1+a}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{T-T_{50\%}}{\sigma}\right)^2\right], \quad T_n \leq T \leq T_k. \quad (18)$$

Кроме усеченного нормального распределения известны также и другие аналитические зависимости, которые можно использовать для описания функций распределения состава нефтяных смесей [12, 13].

Укрупненная блок-схема алгоритма расчета наиболее вероятных составов продуктовых потоков колонны ректификации нефтяных смесей приведена на рис. 1.

### 3. Программное приложение

Рассмотренный выше алгоритм реализован в специально разработанном программном приложении. В нем функции констант фазового равновесия микрокомпонентов от температуры их кипения рассчитываются на основе уравнения Ашворта, а функция распределения состава исходной смеси представлена усеченным нормальным распределением (18).

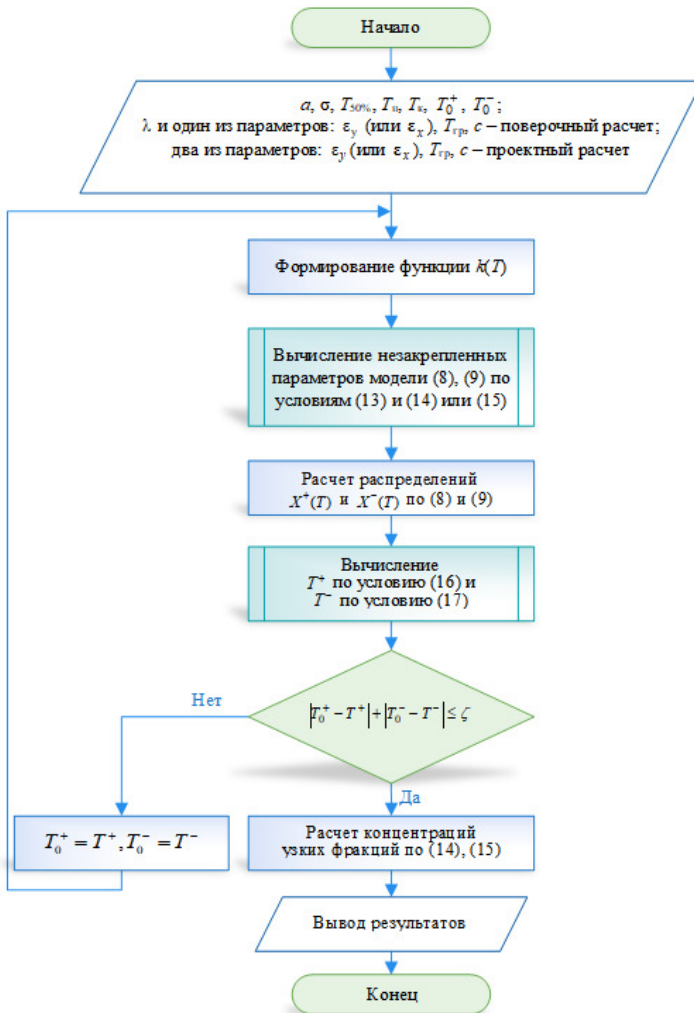


Рис. 1. Блок-схема алгоритма расчета наиболее вероятных составов продуктовых потоков колонны ректификации нефтяных смесей

Приложение разработано на языке Python с использованием сторонних библиотек: «Pyside2», «NumPy», «PyQtGraph», «Decimal» и «PyFPDF». Для сохранения данных используется СУБД Sqlite. Для работы с графика-

ми используется модуль Ruytgraph, который поддерживает многие интерфейсные библиотеки, в том числе Pyside2 и Qt5. Основное окно интерфейса этого приложения с активной вкладкой «Концентрации узких фракций» показано на рис. 2.

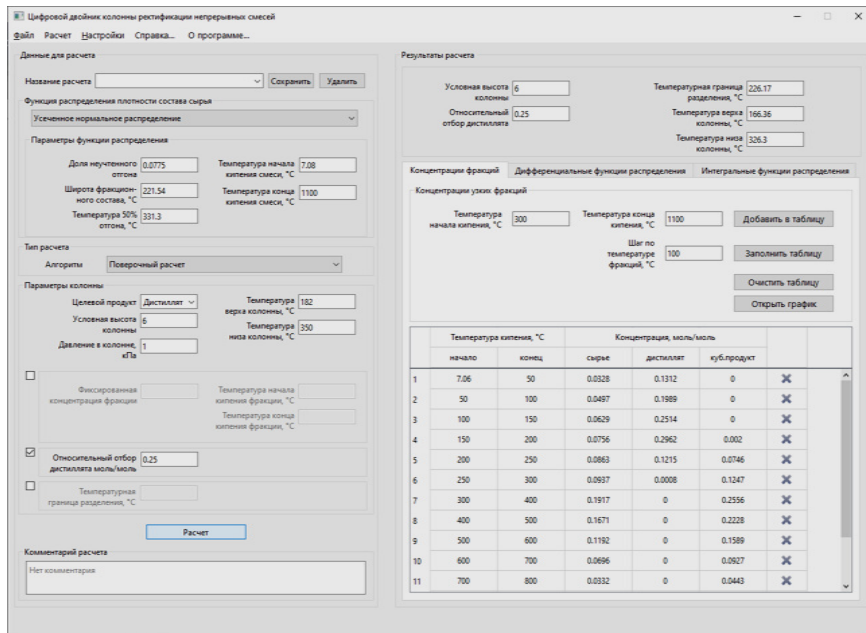


Рис. 2. Интерфейс приложения

В левой части окна вводятся новые исходные данные или загружаются ранее введенные из сохраненных файлов, а также выбирается вариант (проектный или поверочный) расчета колонны. При вводе новых данных осуществляется проверка их корректности и в случае ошибки выдает-ся соответствующее сообщение.

В правой части окна выводятся основные результаты расчета: режимные и конструктивные параметры колонны, а также распределения микрокомпонентов в потоках колонны. Функции распределения составов представлены в табличной и графической форме в трех вкладках: «Концентрации узких фракций», «Дифференциальные функции распределения» и «Интегральные функции распределения». Кроме этого, дифференциальные и интегральные функции распределения составов разделяемой смеси и

продуктовых потоков могут быть выведены в отдельном окне (рис. 3). Все результаты расчетов можно вывести на печать.

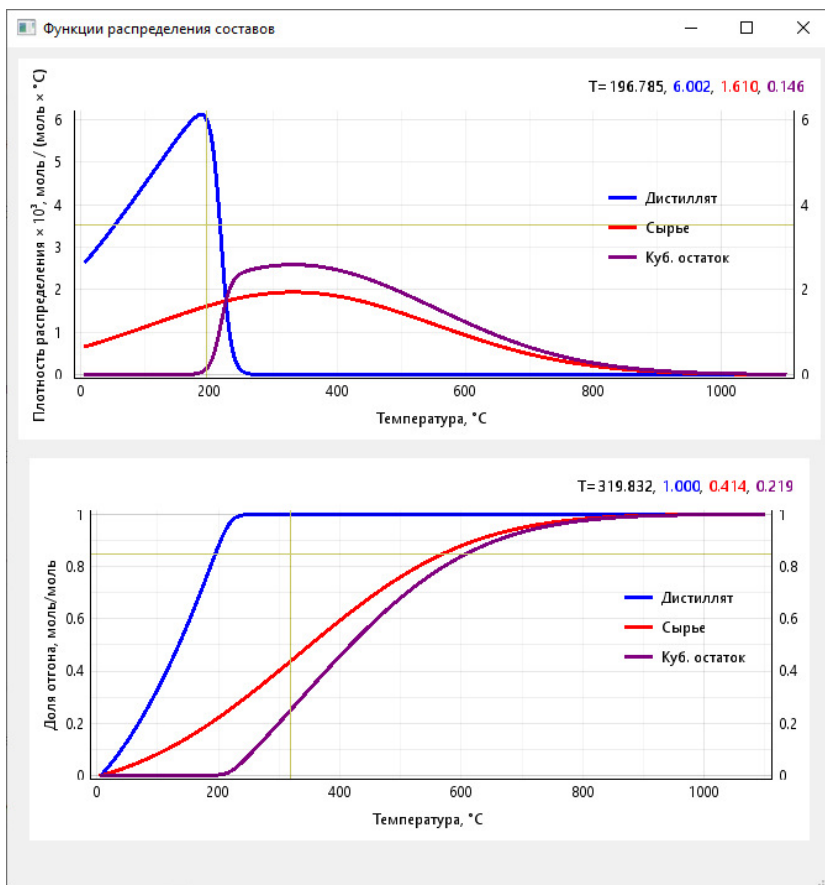


Рис. 3. Дифференциальные и интегральные функции распределения состава

**Закключение.** Приведены постановки задач и алгоритмы расчета наиболее вероятных составов продуктовых потоков колонн ректификации нефтяных смесей. В основе метода расчета лежит информационный принцип максимальной энтропии, который позволяет получить наиболее достоверный результат на основе неполной исходной информации.

Рассмотрено программное приложение, в котором реализованы алгоритмы расчета колонны ректификации в проектной и поверочной постановках задачи. Приложение может быть использовано для поддержки принятия решений как при проектировании новых ректификационных аппаратов, так и при оптимизации действующих аппаратов. Также оно может быть включено в системную стратегию расчета ректификационных установок в качестве одного из иерархических уровней (см. [7, 12]) наряду с другими приложениями расчета колонн ректификации на основе энтропийного метода [13–15].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров И.А.* Перегонка и ректификация в нефтепереработке. М.: Химия, 1981, 352 с.
2. *Jaynes E.T.* Probability theory: The logic of science. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 727 p.
3. *Трайбус М.* Термостатика и термодинамика. М.: Энергия, 1970. 504 с.
4. *Марон А.И.* Оценка качества обслуживания сложных технических устройств на основе информационного принципа Джейнса // Бизнес-информатика. 2016. Т. 38, № 4. С. 47–51.
5. *Favretti M.* Remarks on the Maximum Entropy Principle with Application to the Maximum Entropy Theory of Ecology // Entropy. 2018. Vol. 20, no. 1. P. 11.
6. *Майков В.П.* Введение в системный анализ. М.: МГУИЭ, 2005. 100 с.
7. *Балунов А.И.* Энтропия информация в теории ректификации / А.И. Балунов, В.П. Майков // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 2003. Т. 46, № 9. С. 54–67.
8. *Балунов А.И.* Расширенный принцип максимальной энтропии для описания процесса фазовых превращений в атермальной системе / А.И. Балунов, В.П. Майков // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 2014. Т. 57, № 12. С. 93–99.
9. *Майков В.П.* Расчет составов дистиллята и кубового продукта при ректификации непрерывных и дискретно-непрерывных смесей на основе вероятностной (информационной) модели / В.П. Майков, К.К. Моругин, Н.М. Караваяев // Доклады АН СССР. 1978. Т. 239, № 5. С. 1157–1160.
10. *Балунов А.И.* Термодинамический метод расчета составов продуктов разделения при ректификации непрерывных и дискретно-непрерывных смесей / А.И. Балунов, О.В. Дзюба, В.П. Майков // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 1996. Т. 39, № 1-2. С. 86–89.
11. *Балунов А.И.* Метод и алгоритмы расчета составов продуктов разделения при ректификации сложных смесей // Математические методы в технологиях и технике. 2021. № 8. С. 49–54.
12. *Спиридонов А.В.* Построение кривой ИТК по данным фракционной разгонки с учетом динамических погрешностей системы измерения температуры / А.В. Спиридонов, Г.Н. Абаев, О.Н. Жаркова, Т.Н. Шипило // Химия и технология топлив и масел. 1999. № 3. С. 37–39.

13. *Балунов А.И.* Аппроксимация данных анализа фракционного состава нефти кривой разгона многоемкостного объекта / А.И. Балунов, М.П. Цыганков, А.Е. Зуев // Вопросы современной науки и практики. Университет им. В.И. Вернадского. 2014. № 4(54). С. 42–45.
14. *Балунов А.И.* Энтропия и информация в химико-технологическом образовании // Математика и естественные науки. Теория и практика. Ярославль: ЯГТУ, 2018. С. 71–83.
15. *Балунов А.И.* Алгоритмы и программный комплекс расчета колонн ректификации на основе энтропийного метода описания процесса / А.И. Балунов, М.А. Смирнов // Математика и естественные науки. Теория и практика. Ярославль: ЯГТУ, 2022. С. 107–119.
16. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2020666085. Расчет колонн многокомпонентной ректификации: № 2020665411 заявл. 26.11.2020: опубл. 04.12.2020 / А.И. Балунов, М.А. Смирнов, С.Ю. Бойков.
17. *Смирнов М.А.* Windows-приложение для поддержки принятия решений при оптимизации процесса ректификации / М.А. Смирнов, А.И. Балунов, С.Ю. Бойков // Математические методы в технике и технологиях - ММТТ. 2020. Т. 12-1. С. 49–54.

# Содержание

## МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА

1. **Абрамов В.В.** Устойчивость нулевого решения полиномиальной системы дифференциальных уравнений с неточно заданными коэффициентами..... 3
2. **Башкин М.А.** Одно однородное нерасщепимое супермногообразие..... 9
3. **Залуцкий А.А., Морозов В.В., Соколов А.Ю., Школьников Е.Н.** Мессбауэровская диагностика динамических свойств 2D-размерных слоев воды на поверхности монтмориллонита..... 13
4. **Ройтенберг В.Ш.** О некоторых нелокальных бифуркациях динамических систем с симметрией..... 25
5. **Юдин Д.В., Абрамов В.В.** Об условиях наращивания выручки в рамках одной балансовой модели..... 35

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

6. **Башкин М.А., Третьякова М.Н.** Одна олимпиадная задача..... 41
7. **Белоножко Д.Ф., Садриева Н.М.** Введение в тему «Параметрические колебания» для студентов вузов и втузов..... 45
8. **Березина Л.В., Васильева А.В., Бурцев А.И.** Анализ результатов решения олимпиадных задач Всероссийской студенческой олимпиады по математике, проведенной РГАТУ имени П.А. Соловьева..... 52
9. **Васильева А.В., Березина Л.В., Бурцев А.И., Башкин М.А.** Задачи Всероссийской студенческой олимпиады по математике, проведенной РГАТУ имени П.А. Соловьева..... 58
10. **Зубов В.А., Козлов Г.Е.** Некоторые приложения теории рядов для вычисления интегралов..... 68
11. **Левчук Т.В.** Имитационное моделирование колебаний вагона на основе дифференциальных уравнений Д'Аламбера и Лагранжа... 75
12. **Оленикова Ю.К., Ройтенберг В.Ш.** Анализ результатов Всероссийской студенческой олимпиады по математике 2022 года..... 86
13. **Оленикова Ю.К., Ройтенберг В.Ш.** Задания Всероссийской студенческой олимпиады по математике 2022 года..... 93
14. **Ушенин М.В., Романова М.Н.** Дифференцирование и интегрирование рядов в задачах вычисления суммы степенного ряда..... 102

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

15. **Лискина Е.Ю., Попель С.А.** Идентификация параметров динамической модели односекторной экономики с дискретным временем..... 107
16. **Малышев Д.В., Соловьев М.Е., Балдаев С.Л., Мищенко В.И.** Численное моделирование остывания дорожки напыления порошкового покрытия..... 113
17. **Мельников М.К., Соловьев М.Е., Балдаев С.Л., Федорова М.О.** Моделирование плотности упаковки частиц порошкового покрытия методом дискретных элементов..... 120
18. **Смирнов М.А., Балунов А.И.** Математическая модель и программное приложение для расчета колонн ректификации нефтяных смесей..... 129



Научное издание

**МАТЕМАТИКА  
И  
ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ**

**ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА**

**Выпуск 18**

Ответственный редактор А.Н. Жаров

Редактор М.А. Канакотина

Подписано в печать 14.03.23. Формат 60x84 1/16. Бумага белая.

Гарнитура Таймс. Офсетная печать

Усл. печ. л. 8,37. Уч.-изд. л. 8,30. Тираж 25. Заказ 5.

Ярославский государственный технический университет

152023, Ярославль, Московский пр., 88

Отпечатано в Копировальном центре ЯГТУ

152023, Ярославль, Московский пр., 88